

.....Soubhia..... E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 13 / 07 / 2011
.....(Camilo).....
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

Ana Luisa Soubhia

**Otimização simultânea dos parâmetros da
planta e do controlador LQR usando
uma formulação analítica para o gradiente**

Campinas, 2011

Ana Luisa Soubhia

Otimização simultânea dos parâmetros da planta e do controlador LQR usando uma formulação analítica para o gradiente

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos

Campinas

2011

i

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

So81o Soubhia, Ana Luisa
Otimização simultânea dos parâmetros da planta e do controlador LQR usando uma formulação analítica para o gradiente / Ana Luisa Soubhia – Campinas, SP: [s.n.], 2011.

Orientador: Juan Francisco Camino dos Santos.
Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Otimização estrutural. 2. Otimização. 3. Controladores ótimos. 4. Sistemas lineares. 5. Vibrações. I. Camino dos Santos, Juan Francisco. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês:	Simultaneous optimization of the plant parameters and the LQR controller using an analytical formulation for the gradient
Palavras-Chave em Inglês:	Structural optimization; Optimization; Optimal controllers; Linear systems; Vibration.
Área de Concentração:	Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação:	Mestre em Engenharia Mecânica
Banca Examinadora:	Robson Pederiva e José Juliano de Lima Junior.
Data da Defesa:	13/07/2011
Programa de Pós-Graduação:	Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

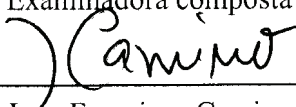
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Otimização simultânea dos parâmetros da
planta e do controlador LQR usando
uma formulação analítica para o gradiente**

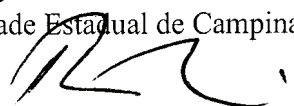
Autor: Ana Luisa Soubhia

Orientador: Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos

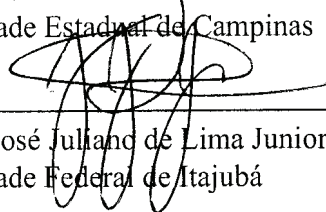
A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos, Presidente
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Robson Pederiva
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior
Universidade Federal de Itajubá

Campinas, 13 de julho de 2011

Dedico este trabalho aos meus pais, Douglas e Marisa, e à minha irmã Marina.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que colaboraram de alguma forma para com a elaboração desta dissertação, em especial:

- Aos meus pais e à minha irmã que foram essenciais para a realização deste sonho; que foram o meu porto seguro e que sempre estiveram comigo nos momentos difíceis.
- Ao professor e amigo Edmundo Capelas pelos sábios conselhos.
- À amiga Ivana que me fez acreditar que seria possível escrever esta dissertação.
- Aos meus amigos do Laboratório de Controle de Sistemas Dinâmicos que sempre me reanimaram nos momentos de desespero.
- Aos meus amigos do Departamento de Energia (DE) que estavam sempre animados para um churrasco ou para um *happy hour* no Bar do Zé.
- À Regina, amiga e secretária do Departamento de Projeto Mecânico (DPM), que sempre fez com que o horário do café se tornasse ainda mais agradável.
- Ao meu orientador professor Camino.
- À CAPES por ter financiado este projeto.

Agradeço a Deus pela força, saúde e oportunidade de conhecer essas pessoas maravilhosas que fazem parte da minha vida.

*... Evitemos a morte em doses suaves,
recordando sempre que estar vivo exige um
esforço muito maior que o simples fato de
respirar. Somente a perseverança fará com que
conquistemos um estágio esplêndido de
felicidade. (Pablo Neruda).*

RESUMO

Soubhia, Ana Luisa. *Otimização simultânea dos parâmetros da planta e do controlador LQR usando uma formulação analítica para o gradiente*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.

O tema *Otimização dos parâmetros da planta e do controlador* é o objeto de estudo desta dissertação. Este trabalho propõe três metodologias analíticas: Metodologia Baseada na Resposta Temporal, Metodologia Quadrática e Metodologia Variacional, para solucionar o problema de otimização simultânea dos parâmetros de uma suspensão veicular e do controlador LQR. Essas metodologias são investigadas, respectivamente, com base na solução da equação de estado, no problema do Regulador Linear Quadrático (LQR) Ótimo e no Cálculo Variacional. A partir de um algoritmo encontrado na literatura foram iniciados os estudos numéricos. Esse algoritmo permite calcular derivadas de exponenciais matriciais, que são essenciais para o desenvolvimento da metodologia proposta para se resolver o problema da otimização simultânea dos parâmetros da planta e do controlador, no qual a obtenção de uma formulação analítica para o gradiente da função a ser minimizada é importante. Como aplicação, é proposto um problema de otimização simultânea do ganho de um controlador LQR e dos parâmetros de uma suspensão veicular ativa. Esse problema é resolvido numericamente utilizando-se o *software* MATLAB. Essa dissertação é desenvolvida da seguinte forma: Primeiramente, são apresentadas as metodologias analíticas e as metodologias numéricas. A partir do estudo numérico, os resultados do problema de otimização aplicado ao modelo de uma suspensão veicular são obtidos. Por fim, as conclusões e os possíveis trabalhos futuros são apresentados.

Palavras-Chave: Otimização estrutural; Otimização; Controladores ótimos; Sistemas lineares; Vibrações.

ABSTRACT

Soubhia, Ana Luisa. *Simultaneous optimization of the plant parameters and the LQR controller using an analytical formulation for the gradient*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.

In this work, the theme *Optimization of plant and controller parameters* is studied. This work shows three analytical methodologies: Methodology Based on Temporal Response, Methodology Quadratic and Methodology Variational, suggested to solve the simultaneous optimization problem of plant parameters and the controller of the linear and time invariant system. These methodologies are investigated, respectively, based on the solution of the state equation, on the Quadratic Regulator problem and on the Variational Calculus. From an algorithm that was found in the literature, the numerical studies were started. The goal of this algorithm is to calculate the derived from matrix exponential. This function is essential to develop the numerical methodology suggested to solve the optimization problem of plant parameters and the controller, in which is important to find an analytical form for the gradient of the object function. As an application, an optimization problem of plant parameters and the controller for a quarter-car active vehicle suspension is suggested. This problem is solved numerically using the software MATLAB. This work is developed as follows: Firstly, the analytical and numerical methodologies are presented. From the numerical studies, the vehicle suspension optimization problem results are obtained. And, in the end, the conclusions and the possible future works are presented.

Keywords: Structural optimization; Optimization; Optimal controllers; Linear systems; Vibration.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Problema do Regulador Linear Quadrático Ótimo.	9
3.1	Modelo de um quarto de carro de uma suspensão veicular.	34
3.2	Curvas $x_1(t)$ de resposta ao degrau - Nominal e LQR.	46
3.3	Curvas $x_2(t)$ de resposta ao degrau - Nominal e LQR.	46
3.4	Curvas $x_1(t)$ de resposta ao degrau - Nominal, Iterativo e Simultâneo com o gradiente.	47
3.5	Curvas $x_2(t)$ de resposta ao degrau - Nominal, Iterativo e Simultâneo com o gradiente.	48
3.6	Curvas $x_1(t)$ de resposta ao degrau - Nominal e Iterativo sem e com o gradiente. . . .	48
3.7	Curvas $x_2(t)$ de resposta ao degrau - Nominal e Iterativo sem e com o gradiente. . . .	49
3.8	Curvas $x_1(t)$ de resposta ao degrau - Nominal e Simultâneo sem e com o gradiente. . .	50
3.9	Curvas $x_2(t)$ de resposta ao degrau - Nominal e Simultâneo sem e com o gradiente. . .	50
3.10	Curvas $x_1(t)$ de resposta ao degrau - Nominal, Iterativo e Simultâneo sem o gradiente.	51
3.11	Curvas $x_2(t)$ de resposta ao degrau - Nominal, Iterativo e Simultâneo sem o gradiente.	51

LISTA DE TABELAS

3.1	Custos J_{nom} e J_{lqr} .	40
3.2	Controladores K_{nom} e K_{lqr} .	41
3.3	Custos $J_{ite_{on}}$ e $J_{sim_{on}}$.	41
3.4	Parâmetros da planta $\alpha_{ite_{on}}$ e $\alpha_{sim_{on}}$.	41
3.5	Controladores $K_{ite_{on}}$ e $K_{sim_{on}}$.	41
3.6	Custos $J_{ite_{off}}$ e $J_{sim_{off}}$.	41
3.7	Parâmetros da planta $\alpha_{ite_{off}}$ e $\alpha_{sim_{off}}$.	42
3.8	Controladores $K_{ite_{off}}$ e $K_{sim_{off}}$.	42
3.9	Tempo computacionais.	42
3.10	Custos J_{nom} e J_{lqr} .	43
3.11	Controladores K_{nom} e K_{lqr} .	43
3.12	Custos $J_{ite_{on}}$ e $J_{sim_{on}}$.	44
3.13	Parâmetros da planta $\alpha_{ite_{on}}$ e $\alpha_{sim_{on}}$.	44
3.14	Controladores $K_{ite_{on}}$ e $K_{sim_{on}}$.	44
3.15	Custos $J_{ite_{off}}$ e $J_{sim_{off}}$.	44
3.16	Parâmetros da planta $\alpha_{ite_{off}}$ e $\alpha_{sim_{off}}$.	44
3.17	Controladores $K_{ite_{off}}$ e $K_{sim_{off}}$.	44
3.18	Tempo computacionais.	45
A.1	Normas Euclidiana e Infinita - Matrizes A e B que comutam	63
A.2	Normas Euclidiana e Infinita - Matrizes A e B que comutam	63
A.3	Normas Euclidiana e Infinita - Matrizes A e B que comutam	64
A.4	Normas Euclidiana e Infinita de J_{teste} - Matrizes A e B que comutam	64
A.5	Normas Euclidianas e Infinitas - Matrizes que não comutam (α_1)	67
A.6	Normas Euclidianas e Infinitas - Matrizes que não comutam (α_2)	67
A.7	Normas Euclidianas e Infinitas - Matrizes que não comutam (α_1)	68
A.8	Normas Euclidianas e Infinitas - Matrizes que não comutam (α_2)	68
A.9	Normas Euclidiana e Infinita de J_{teste} - Matrizes A e B que não comutam (α_1)	69

A.10 Normas Euclidiana e Infinita de J_{teste} - Matrizes A e B que não comutam (α_2)	69
--	----

LISTA DE ALGORITMOS

2.1	Estratégia Iterativa	11
2.2	Derivada da função exponencial matricial	31
3.1	Aplicação: Estratégia Iterativa	38
3.2	Aplicação: Parâmetros Otimizados	39
3.3	Aplicação: Custo J_{lqr}	39
B.1	Combinação Linear de Matrizes	70
C.1	Planta do Sistema	71
D.1	Função Custo	72
D.2	Gradiente	73

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Abreviaturas

Cap.	Capítulo
Sec.	Seção
Fig.	Figura
Tab.	Tabela
Eq.	Equação

Siglas

DPM	Departamento de Projeto Mecânico
FEM	Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas

LISTA DE SÍMBOLOS

A, B, C, D, K, P, Q, R	matrizes
A'	transposta da matriz A
$A(\alpha), B(\alpha), \dots$	matrizes dependentes do parâmetro α
$x(t)$	vetor de estado
$y(t)$	vetor de saída
$u(t)$	vetor de controle
t	tempo [s]
$X(s)$	transforma de Laplace de $x(t)$
$x(0)$	condição inicial
$x'(t)$	transposta do vetor $x(t)$
R^{-1}	inversa da matriz R
m_1, m_2	massas [kg]
k_1, k_2	rigidez de molas [N/m]
c	coeficiente de amortecimento [Ns/m]
J	função objetivo, função custo
$X > 0$	indica que a matriz X é positiva definida
$X \geq 0$	indica que a matriz X é positiva semidefinida
$\text{Tr}(X)$	traço da matriz X
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
$\nabla f(x)$	gradiente de $f(x)$
$\nabla^2 f(x)$	hessiana de $f(x)$
\mathcal{L}	função Lagrangiana
$\ p\ _2$	norma Euclidiana
$\ p\ _\infty$	norma Infinita
$\alpha_{ite_{off}}$	Parâmetros da planta obtidos após a otimização iterativa, sem fornecer o gradiente analítico

$\alpha_{ite_{on}}$	Parâmetros da planta obtidos após a otimização iterativa, fornecendo o gradiente analítico
$\alpha_{sim_{off}}$	Parâmetros da planta obtidos após a otimização simultânea, sem fornecer o gradiente analítico
$\alpha_{sim_{on}}$	Parâmetros da planta obtidos após a otimização iterativa, fornecendo o gradiente analítico
K_{lqr}	Controlador LQR
$K_{ite_{off}}$	Controlador obtido após a otimização iterativa, sem fornecer o gradiente analítico
$K_{ite_{on}}$	Controlador obtido após a otimização iterativa, fornecendo o gradiente analítico
$K_{sim_{off}}$	Controlador obtido após a otimização simultânea, sem fornecer o gradiente analítico
$K_{ite_{on}}$	Controlador obtido após a otimização iterativa, fornecendo o gradiente analítico
J_{nom}	Custo obtido a partir dos parâmetros nominais em malha aberta
J_{lqr}	Custo obtido a partir dos parâmetros nominais em malha fechada, com o controlador K_{lqr}
$J_{ite_{off}}$	Custo obtido após a otimização iterativa, sem fornecer o gradiente analítico
$J_{ite_{on}}$	Custo obtido após a otimização iterativa, fornecendo o gradiente analítico
$J_{sim_{off}}$	Custo obtido após a otimização simultânea, sem fornecer o gradiente analítico
$J_{sim_{on}}$	Custo obtido após a otimização simultânea, fornecendo o gradiente analítico

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivações e Objetivos	1
1.2	Revisão Bibliográfica	3
1.2.1	Controle Ótimo para Suspensão Ativa	3
1.2.2	Otimização dos Parâmetros da Planta e do Controlador	4
2	OTIMIZAÇÃO DOS PARÂMETROS DA PLANTA E DO CONTROLADOR LQR	7
2.1	Conceitos Básicos de Sistemas Lineares	7
2.2	Estratégias de Otimização	9
2.3	Metodologias Analíticas	11
2.3.1	Problema de Otimização Linear e Não Linear	11
2.3.2	Problema de Otimização	17
2.3.3	Metodologia Baseada na Resposta Temporal	18
2.3.4	Metodologia Quadrática	23
2.3.5	Metodologia Variacional	26
2.4	Metodologia Numérica	30
3	RESULTADOS NUMÉRICOS	34
3.1	Aplicação em uma Suspensão Veicular	34
3.2	Resultados	39
3.2.1	Parâmetros Nominais Retirados da Literatura	40
3.2.2	Parâmetros Nominais Otimizados	43
4	COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES	52
4.1	Comentários	52
4.2	Conclusões	52
4.3	Trabalhos Futuros	53

REFERÊNCIAS	54
APÊNDICE A - TESTES DO ARTIGO	58
A.1 Matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ que comutam	58
A.2 Matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ que não comutam	65
APÊNDICE B - COMBINAÇÃO LINEAR DE MATRIZES	70
APÊNDICE C - PLANTA DO SISTEMA	71
APÊNDICE D - FUNÇÃO CUSTO E GRADIENTE	72
ANEXO A - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DINÂMICA DO SISTEMA	74
A.1 Sistema em Malha Fechada	74
ANEXO B - NORMA EUCLIDIANA E NORMA INFINITA	75

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho é estruturado em quatro capítulos. No capítulo 1, é apresentado o tema *Otimização dos parâmetros da planta e do controlador*, objeto de estudo desta dissertação. E, também, é feita uma revisão bibliográfica sobre suspensões veiculares e sobre estratégias de otimização do projeto de parâmetros de planta e de controlador.

No capítulo 2, as metodologias analíticas e as metodologias numéricas são apresentadas. Primeiramente, uma breve explanação sobre sistemas lineares, contínuos e invariantes no tempo é feita. Em seguida, o problema do regulador linear quadrático é tratado. Três metodologias analíticas são apresentadas: Metodologia Baseada na Resposta Temporal, Metodologia Quadrática e Metodologia Variacional. Devido à dificuldade em se trabalhar com as condições de otimalidade encontradas analiticamente, uma metodologia numérica é introduzida. Esta metodologia é desenvolvida a partir de um algoritmo encontrado na literatura que calcula as derivadas de funções exponenciais matriciais.

No capítulo 3, os resultados numéricos são apresentados. A partir de um modelo de suspensão veicular, as estratégias de otimização iterativa e simultânea são desenvolvidas fornecendo ou não uma fórmula analítica para o gradiente da função a ser minimizada. Dessa forma, os resultados numéricos desta dissertação são obtidos.

No capítulo 4, são apresentadas as discussões finais, conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

A dissertação prossegue com a listagem das referências bibliográficas citadas ao longo do trabalho. Em seguida, são apresentados apêndices e anexos considerados importantes para o desenvolvimento desta pesquisa.

1.1 Motivações e Objetivos

Projetos de suspensões veiculares ativas têm atraído a atenção de pesquisadores e muitos trabalhos têm sido propostos na literatura (Elmadany e Abduljabbar (1999) e Fathy et al. (2003)),

de forma a melhorar a dirigibilidade e, ao mesmo tempo, minimizar o desconforto do passageiro e maximizar o atrito entre as rodas e a superfície de rodagem, aumentando a estabilidade do veículo.

Um dos primeiros pesquisadores neste campo, Thompson (1971), analisou o comportamento dinâmico de um modelo simples de uma suspensão veicular. Em seguida, em Thompson (1976), o autor incorporou técnicas de controle ótimo para o mesmo modelo de suspensão, usando um índice quadrático de desempenho que representava adequadamente as especificações técnicas do projeto.

Os trabalhos citados acima apresentam técnicas de controle que fornecem um desempenho ótimo apenas para um conjunto nominal de parâmetros. No entanto, se os parâmetros estruturais forem otimizados, o controlador deixa de ser ótimo e precisa ser reprojetoado. Também não há garantia que o projeto sequencial – otimização dos parâmetros estruturais seguido do projeto do controlador – leve a um desempenho ótimo.

A técnica de projeto integrado tem o objetivo de encontrar a combinação de parâmetros da planta e do controlador que atinja um melhor desempenho. Existem várias estratégias de otimização que podem ser aplicadas ao problema de projeto integrado (FATHY et al., 2001). As principais estratégias são: a estratégia sequencial, a estratégia iterativa (SMITH et al., 1992), a estratégia bi-level (Rao (1988) e Belvin e Park (1990)) e a estratégia simultânea (CAMINO et al., 2003).

Tradicionalmente, a otimização de uma planta e do seu controlador obedece a uma estratégia sequencial, ou seja, resolve-se o problema em dois passos. Primeiramente, é feita a otimização dos parâmetros da planta. Posteriormente, para a planta otimizada, projeta-se o controlador. Embora a estratégia sequencial tenha sido utilizada com sucesso na maioria dos trabalhos presentes na literatura, ela pode não fornecer a solução ótima, ao contrário do que ocorre nos problemas em que os parâmetros da planta e do controlador são otimizados simultaneamente.

Contudo, deve-se salientar particularidades do problema de otimização simultânea. O projeto simultâneo de estrutura e de um controlador geralmente é complexo, pois resulta em problemas não lineares e não convexos. Além disso, os algoritmos disponíveis para a solução de tal problema são computacionalmente custosos (Onoda e Haftka (1987); Grandhi (1989); Jin e Sepulveda (1995) e Yang e Chen (1996)).

O objetivo deste trabalho é explorar a estratégia da otimização simultânea através das seguintes metodologias analíticas: Metodologia Baseada da Resposta Temporal; Metodologia Quadrática e Metodologia Variacional. Além do estudo analítico, propõe-se um estudo numérico. A partir de um algoritmo presente no artigo Brancík (2008), que calcula derivadas de funções exponenciais

matriciais, uma forma analítica para o gradiente da função custo a ser minimizada é fornecida ao programa *fmincon* (do MATLAB), com o objetivo de ser uma ferramenta auxiliadora na resolução do problema de otimização. Como aplicação, é proposto um problema de otimização de uma suspensão veicular ativa usando o modelo um quarto de veículo.

1.2 Revisão Bibliográfica

Segundo Lu e Skelton (2000), o problema do projeto de estruturas é dividido em quatro fases: Fase do Projeto Estático, na qual as estruturas são projetadas de acordo com as respostas estáticas; Fase do Projeto Dinâmico, em que as respostas dinâmicas passaram a ser consideradas nos projetos das estruturas; Fase do Projeto Híbrido, em que controladores ativos são introduzidos nos sistemas para que as estruturas respondam às exigências do projeto, e a Fase dos Sistemas, fase em que este trabalho está inserido e, na qual o sistema de controle ativo e a estrutura são projetados simultaneamente.

Contextualizando o tema tratado nesta dissertação com os trabalhos encontrados na literatura, uma breve revisão bibliográfica é apresentada de forma cronológica e por seção. Primeiramente são tratados os trabalhos referentes a suspensões veiculares e controle ótimo. Em seguida, são abordadas as pesquisas sobre o processo de otimização dos parâmetros da estrutura e do controlador.

1.2.1 Controle Ótimo para Suspensão Ativa

De acordo com Camino (1998), projetos de suspensão ativa vem sendo pesquisados há pelo menos três décadas. Um dos primeiros pesquisadores a publicar trabalhos nessa área foi Thompson que em 1971 publicou o trabalho Thompson (1971) no qual é apresentada uma análise sobre o comportamento de uma suspensão unidimensional do ponto de vista de um Filtro Passa Baixa.

Desde então, trabalhos sobre suspensão veicular e teoria de controle ótimo são frequentemente encontrados na literatura, como em Thompson (1976). Nesse artigo, o autor, utilizando a

teoria do regulador linear quadrático ótimo, atende às especificações do projeto de uma suspensão veicular. Em Thompson e Pearce (2001), os autores apresentam o problema de controle ótimo para um modelo bidimensional de uma suspensão veicular. O resultado é obtido a partir de soluções das equações de Lyapunov e de Ricatti.

Um sistema de suspensão automotiva ativa é composto de uma estrutura mecânica e de um controlador de realimentação. Convencionalmente, esses dois elementos são projetados em sequência, com o projeto do controlador subsequente ao da mecânica estrutural. Porém, esse método tradicional pode não fornecer o desempenho global ideal para o sistema, por isso o projeto simultâneo da estrutura e controlador tem despertado interesse de pesquisadores (Camino (2003)).

1.2.2 Otimização dos Parâmetros da Planta e do Controlador

Em Hale et al. (1984), o problema do projeto estrutural e do projeto de controle é matematicamente unificado, com o objetivo de criar um problema de otimização único. Primeiramente, as condições necessárias para a solução deste problema são obtidas de forma analítica. Em seguida, visto que essas condições são não lineares, uma solução numérica foi obtida.

Tradicionalmente, a estrutura e o controlador são projetados separadamente. Em geral, a estrutura é otimizada para minimizar o peso, sujeito a restrições em relação às tensões admissíveis, e o sistema de controle é otimizado para minimizar um índice de desempenho quadrático considerando a deformação do pneu e o esforço de controle. O artigo Onoda e Haftka (1987) apresenta uma formulação para o problema de otimização integrado de um sistema que representa um veículo espacial. A técnica de otimização em dois níveis (*nested optimization*) é desenvolvida para se obter a solução do problema combinado.

O artigo Grigoriadis et al. (1993) sugere o seguinte processo iterativo. Para uma planta inicial, é obtido um controlador que atenda às especificações do projeto. Em seguida, a planta e o controlador são reprojatados simultaneamente de forma a minimizar o esforço de controle ativo. Esse último passo é resolvido utilizando-se programação convexa.

Uma nova abordagem de projeto simultâneo é apresentada em Kajiwar et al. (1994). As variáveis da estrutura e do controlador são otimizadas simultaneamente, utilizando-se a análise de

sensibilidade, minimizando as respostas devido às perturbações dos ruídos brancos e coloridos, sujeita a uma restrição de estabilidade.

Para a formulação do problema de otimização dos parâmetros da estrutura e do controlador, em Zhu et al. (1999) duas estratégias são exploradas, a Aproximação Serial e a Aproximação Paralela. Na primeira delas, a otimização estrutural é realizada separadamente da otimização do controlador. Ou seja, enquanto ocorre a otimização dos parâmetros da estrutura, o controlador é mantido fixo e, enquanto ocorre a otimização do controlador, os parâmetros da estrutura são mantidos fixos. Na Aproximação Paralela, a otimização estrutural é o processo principal e externo e a otimização do controlador é um processo secundário e interno. Sempre que a estrutura é modificada um novo controlador ideal é projetado.

Para se obter a solução ótima do problema do projeto integrado alguns autores propuseram o procedimento de otimização simultânea dos parâmetros da planta e do controlador. Como em Begg e Liu (2000), em que algoritmos de otimização simultânea são apresentados. Tais algoritmos são desenvolvidos com base em técnicas numéricas, que consiste em uma busca local probabilística, e nos algoritmos genéticos, pertencentes a uma classe de algoritmos evolutivos, que usam técnicas inspiradas na biologia evolutiva, como hereditariedade, mutação, seleção natural e recombinação (ou *crossing over*). Os algoritmos apresentados no artigo mostram eficiência para melhorar o desempenho com respeito à robustez e à controlabilidade.

O artigo Fathy et al. (2001) analisa as soluções do problema de otimização estrutural e de otimização do controlador, utilizando a estratégia sequencial, iterativa, em dois níveis e simultânea. Os resultados foram obtidos usando uma formulação variacional do problema de controle ótimo, no qual a estrutura particular do controlador não foi definida.

Alguns artigos encontrados na literatura propõem a utilização de LMIs (Linear Matrix Inequality) para se resolver o problema de otimização simultânea, como em Camino et al. (2002) e Camino et al. (2003) Nesses artigos, os autores apresentam técnicas para se resolver o problema, não convexo, de otimização simultânea dos parâmetros da planta e de uma lei de controle linear. Utilizando-se uma função convexificadora, apresentada em Oliveira et al. (2000) e Camino (2003), o problema de otimização não convexo é aproximado sequencialmente por um problema de otimização convexo, desta forma, o problema de otimização obtido pode ser resolvido utilizando-se LMIs.

No artigo Soubhia et al. (2010) são investigadas técnicas para a solução de problemas de

projeto de otimização simultânea dos parâmetros da planta e do controlador para uma suspensão veicular ativa, de forma que o sistema atinja o melhor desempenho possível. Três diferentes estratégias de otimização são comparadas: a estratégia sequencial, a estratégia iterativa e a estratégia simultânea. Estas estratégias são implementadas utilizando-se a função de otimização *fmincon* do MATLAB.

O problema de otimização proposto, nessa dissertação, é resolvido utilizando-se a função de otimização *fmincon* do MATLAB. Porém, como contribuição, uma forma analítica do gradiente da função a ser minimizada é fornecida ao programa *fmincon*. Assim, o objetivo é aplicar as técnicas de otimização iterativa e simultânea no problema de otimização dos parâmetros da planta e do controlador de uma suspensão veicular e comparar os resultados obtidos a partir do *default* da função *fmincon*, onde o gradiente da função a ser minimizada é aproximado através de diferenças finitas, e os resultados obtidos quando se fornece ao programa *fmincon* a fórmula analítica do gradiente.

2 OTIMIZAÇÃO DOS PARÂMETROS DA PLANTA E DO CONTROLADOR

LQR

Para discutir as metodologias analíticas e a metodologia numérica desenvolvida neste trabalho é necessário fazer uma breve explanação sobre sistemas lineares invariantes no tempo, sobre controle por realimentação de estado e sobre o problema do regulador quadrático ótimo.

Neste capítulo, as metodologias analíticas e a metodologia numérica proposta nesta dissertação são apresentadas.

2.1 Conceitos Básicos de Sistemas Lineares

Os sistemas físicos são em geral não lineares. No entanto, os sistemas lineares invariantes no tempo (do inglês *LTI - Linear Time Invariant*) são importantes em engenharia, pois são mais simples e podem, muitas vezes, ser utilizados para modelar sistemas não lineares, com erros aceitáveis.

Neste trabalho os sistemas usados nas investigações dos processos de otimização são sistemas contínuos, lineares e invariantes no tempo, com representação no espaço de estado dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t); \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída do sistema. A matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de estado, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de saída e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ é a matriz de transmissão direta.

O objetivo da lei de controle $u(t)$ é permitir atender (da melhor forma possível) a um conjunto de condições de desempenho e estabilidade do sistema em malha fechada. Para alcançar tais condições, exige-se, normalmente, uma realimentação do sistema.

Existem três técnicas básicas de projeto de sistemas de controle por realimentação: lugar das raízes, resposta em frequência e realimentação de estados (tratada neste trabalho). Embora haja

pontos de equivalência entre essas técnicas, o emprego de modelos por realimentação de estados tem ampliado seu campo de aplicação em virtude da possibilidade de tratar sistemas no domínio do tempo, que tenham múltiplas entradas e múltiplas saídas (sistemas MIMO).

No projeto de sistemas de controle por realimentação completa de estado adota-se a lei de controle na seguinte forma

$$u(t) = -Kx(t); \quad (2.2)$$

sendo a matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ denominada matriz de ganho de realimentação de estado.

Substituindo a equação (2.2) no sistema (2.1) tem-se o seguinte sistema LTI em malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BK)x(t), \\ y(t) &= (C - DK)x(t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

A estabilidade e a característica da resposta temporal são determinadas pelos autovalores da matriz $A - BK$.

Para se obter a resposta temporal do sistema, precisa-se da solução da equação de estado (2.3). Aplicando-se a transformada de Laplace na equação de estado do sistema em malha fechada obtém-se

$$sX(s) - x(0) = (A - BK)X(s),$$

onde $X(s)$ é a transformada de Laplace de $x(t)$ e $x(0)$ é o estado inicial. Rearranjando a equação anterior tem-se

$$X(s) = [sI - (A - BK)]^{-1} x(0).$$

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace obtém-se a solução da equação (2.3) (ver Anexo A),

$$x(t) = e^{(A-BK)t} x(0). \quad (2.4)$$

Nota-se que, quando $K = 0$, ou seja, quando o sistema está em malha aberta, a solução da equação (2.3) é dada por

$$x(t) = e^{At} x(0). \quad (2.5)$$

Projetos de controladores ótimos para sistemas LTI, usando a técnica do Regulador Linear Quadrático (LQR) Ótimo, podem ser encontrados em Kwakernaak e Sivan (1972).

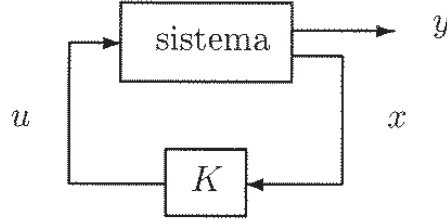


Figura 2.1 - Problema do Regulador Linear Quadrático Ótimo.

Para um sistema contínuo descrito pela equação (2.1), o problema LQR tem o objetivo de determinar um controlador de realimentação completa de estado (Fig. 2.1), que minimize o seguinte índice de desempenho

$$J = \int_0^{\infty} x'(t) Q x(t) + u'(t) R u(t) dt, \quad (2.6)$$

onde Q e R são matrizes de ponderação, tais que, $Q = Q' \geq 0$, é uma matriz simétrica positiva semidefinida e $R = R' > 0$ é uma matriz simétrica positiva definida.

O controlador ótimo LQR de realimentação completa de estado que minimiza o custo da equação (2.6) é dado pela equação (2.2), com $K = R^{-1} B' P$ onde a matriz $P = P'$ é solução da seguinte equação algébrica de Ricatti

$$A' P + P A - P B R^{-1} B' P + Q = 0.$$

De acordo com Reyer (2000), existem várias estratégias para o projeto de otimização do controlador e da planta. As estratégias já pesquisadas foram classificadas dentro de quatro estratégias principais: iterativa, simultânea, sequencial e bi-level. Na seção seguinte são tratadas as estratégias de otimização iterativa e simultânea utilizadas neste trabalho.

2.2 Estratégias de Otimização

O problema de otimização proposto nesta dissertação é definido como

$$\min_{\alpha, K} J \quad (2.7)$$

sujeito a

$$\dot{x}(t, \alpha) = A(\alpha) x(t, \alpha) + B(\alpha) u(t, \alpha) \quad \text{e restrições sobre } \alpha,$$

onde a lei de controle $u(t, \alpha)$ é definida a partir de (2.2), o índice de desempenho J é definido em (2.6) e as matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ são matrizes dependentes do parâmetro α , que contém os parâmetros da planta a serem otimizados: massa, rigidez, amortecimento, etc.

Pode-se reescrever o problema de otimização da seguinte forma

$$\min_{\alpha, K} J \quad (2.8)$$

sujeito a

$$\dot{x}(t, \alpha) = [A(\alpha) - B(\alpha) K] x(t, \alpha) \quad \text{e restrições sobre } \alpha,$$

sendo o funcional de custo J definido como

$$J = \text{Tr} \left[\left(Q + K' R K \right) x(t, \alpha) x'(t, \alpha) \right]. \quad (2.9)$$

Substituindo a solução da equação dinâmica, $x(t, \alpha) = e^{[A(\alpha) - B(\alpha) K]t} x'(0)$, no funcional de custo J obtém-se o seguinte problema de otimização

$$\min_{\alpha, K} J$$

sujeito a

$$\text{restrições sobre } \alpha,$$

onde J passa a ser definido como

$$J = \text{Tr} \left\{ \left(Q + K' R K \right) e^{[A(\alpha) - B(\alpha) K]t} x'(0) x(0) e^{[A(\alpha) - B(\alpha) K]'t} \right\}. \quad (2.10)$$

A estratégia simultânea é utilizada quando deseja-se otimizar simultaneamente os parâmetros da planta α e do controlador K , ou seja, tem-se o problema de otimização (2.7).

As estratégias iterativas propõem, dada uma planta inicial ou um controlador inicial, melhorar o projeto sem comprometer o desempenho do sistema em malha fechada.

Algoritmo 2.1 Estratégia Iterativa

1. Considerando o sistema em malha aberta, ou seja, $K = 0$, resolver o problema de otimização

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha} J \\ \text{sujeito a} \quad & \dot{x}(t, \alpha) = A(\alpha) x(t, \alpha), \end{aligned}$$

onde a matriz $A(\alpha)$ depende de α

2. Para o parâmetro ótimo α , projetar o controlador LQR, K .

3. Usando K , obtido no passo anterior, resolver o problema de otimização

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha} J \\ \text{sujeito a} \quad & \dot{x}(t, \alpha) = \overset{\alpha}{A}(\alpha) x(t, \alpha) + B(\alpha) u(t, \alpha), \end{aligned}$$

onde as matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ são matrizes dependentes de α e a lei de controle $u(t, \alpha)$ é definida a partir de (2.2).

4. Enquanto não convergir, voltar ao passo 2.

Neste trabalho, foram estudadas metodologias analíticas e numérica para se resolver o problema de otimização simultâneo. Essas metodologias são apresentadas a seguir.

2.3 Metodologias Analíticas

Nesta seção são apresentadas as teorias sobre os problemas de otimização lineares e não lineares. É, também, apresentado o problema de otimização simultânea usado para desenvolver as metodologias analíticas investigadas.

2.3.1 Problema de Otimização Linear e Não Linear

O objetivo desta seção é fornecer informações básicas sobre os problemas de otimização lineares e não lineares, irrestritos e restritos, presentes nos livros Luenberger (1937) e Bazaraa e C.M.Shetty (1943).

O conceito de otimização está presente na rotina das pessoas. Essas podem se indagar sobre, por exemplo, qual é o melhor caminho a se percorrer para ir de carro de um ponto a outro da cidade,

de forma que consigam obter o mínimo custo de transporte, ou ainda, podem se questionar sobre qual investimento financeiro que oferece maior possibilidade de lucro, porém que envolva menos riscos. A partir dessas questões são modelados os respectivos problemas matemático. De acordo com esses modelos, existem diferentes tipos de programação matemática para resolvê-los, como programação linear e programação não linear (tratada nesse trabalho).

Dadas as funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, o problema de otimização é descrito por

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && h(x) = 0_m \quad \text{e} \quad g(x) \leq 0_p \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ são as variáveis de otimização, f é denominada de função objetivo ou função de custo e 0_m e 0_p são vetores de zeros de dimensão $m \times 1$ e $p \times 1$, respectivamente. As igualdades $h(x) = 0_m$, isto é, $h_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ e as desigualdades $g(x) \leq 0_p$, ou seja, $g_j(x) = 0$, $j = 1, 2, \dots, p$ são, respectivamente, as restrições de igualdade e as restrições de desigualdade do problema de otimização (2.11).

O problema é chamado irrestrito quando não existirem restrições, isto é, $m = 0$ e $p = 0$. Caso contrário ele é dito restrito.

Programação linear e não linear lidam com o problema de otimizar uma função objetivo, na presença, ou não, de restrições de igualdade e de desigualdade. Se a função objetivo e as restrições do problema de otimização são lineares tem-se um problema de programação linear. Caso contrário, tem-se um problema de programação não linear.

O desenvolvimento do método *simplex* para a programação linear e o advento dos computadores de alta velocidade fizeram com que a programação linear se tornasse uma importante ferramenta para se resolver problemas em diversos campos. No entanto, muitos problemas reais podem não ser adequadamente representados como um programa linear, devido a possibilidade de se ter não linearidade da função objetivo e/ou não linearidade de qualquer restrição. A seguir, é apresentada uma breve explanação sobre problemas de otimização não linear irrestrito e restrito.

Problema de Otimização Não Linear Sem Restrição

Um problema de otimização não linear irrestrito pode ser caracterizado como

$$\text{minimizar } f(x)$$

$$\text{sujeito a } x \in \Omega$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio compacto. Este problema de otimização pode ser resolvido via condições de otimalidade. Primeiro, necessita-se determinar todos os pontos de equilíbrio que satisfaçam as condições necessárias de otimalidade. Em seguida, é preciso avaliar o valor da função objetivo em todos esses pontos. Uma solução ótima produz o menor valor.

Diz-se que $x^0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio da função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que possui todas as derivadas de primeira ordem, se $\nabla f(x^0) = 0_n$, onde 0_n é um vetor de zeros de dimensão $n \times 1$. Um ponto de equilíbrio pode corresponder a um ponto de mínimo, de máximo ou de inflexão de f em \mathbb{R} . Essas informações adicionais sobre os pontos de equilíbrio são obtidas testando o sinal de $\nabla^2 f$ (da hessiana) nesses pontos.

Condições necessárias de primeira ordem: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ possui todas as derivadas de primeira ordem. Se x^* é um mínimo local de f em Ω e um ponto interior de Ω , então $\nabla f(x^*) = 0_n$. Se o problema for convexo, qualquer ponto que satisfaça esta condição é uma solução ótima.

Condições necessárias de segunda ordem: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ possui todas as derivadas de segunda ordem. Se x^* é um mínimo local de f em Ω e um ponto interior de Ω , então

$$\nabla f(x^*) = 0_n \quad \text{e} \quad \nabla^2 f(x^*) \geq 0$$

isto é, a matriz hessiana, $\nabla^2 f(x^*)$, tem que ser semi definida positiva.

Condições suficientes de segunda ordem: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ possui todas as derivadas de segunda ordem. Se x^* é um ponto interior de Ω , assumo que

$$\nabla f(x^*) = 0_n,$$

$$\nabla^2 f(x^*) > 0,$$

ou seja, a hessiana tem que ser positiva definida. Então, x^* é um mínimo local isolado de $f(x)$.

As condições de otimalidade são análogas para os máximos locais de f em Ω , e são obtidas

trocando-se a desigualdade \geq por \leq .

Problema de Otimização Não Linear Com Restrição

Nesta seção, primeiramente são tratados os problemas de otimização não linear com restrição de igualdade. Depois, são abordados os problemas com restrição de desigualdade e, por fim, os problemas com restrições mistas.

Sejam as funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, o problema de otimização não linear com restrição de igualdade é caracterizado como

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && h(x) = 0_m \end{aligned} \tag{2.12}$$

Define-se um conjunto factível \mathcal{S} como um conjunto que contém todos os pontos factíveis do problema, ou seja, $\mathcal{S} = \{x : h_1(x) = 0, h_2(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0\}$.

Um ponto $x^0 \in \mathcal{S}$ é um ponto regular das restrições $h(x) = 0_m$ se $\{\nabla h_1(x^0), \nabla h_2(x^0), \dots, \nabla h_m(x^0)\}$ é um conjunto linearmente independente. A partir dessas definições pode-se listar as condições necessárias e suficientes de otimalidade.

Condições necessárias de primeira ordem: Seja x^* um mínimo local de f sujeito a $x \in \mathcal{S}$ e um ponto regular de \mathcal{S} . Então existe um vetor $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) = \nabla f(x^*) + \nabla h'(x^*) \lambda = 0_n.$$

O vetor $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de multiplicadores de Lagrange.

A Função Lagrangiana, $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, associada ao problema de minimizar f sujeito a $x \in \mathcal{S}$ é definida por

$$\mathcal{L}(x, \lambda) := f(x) + \lambda' h(x).$$

As condições necessárias de primeira ordem usando-se a função Lagrangiana são definidas por

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = 0_n \quad \text{e} \quad \nabla_\lambda \mathcal{L}(x, \lambda) = 0_m,$$

ou seja, correspondem, respectivamente as primeiras derivadas de $\mathcal{L}(x, \lambda)$ com relação a x e com relação a λ .

No caso em que o problema de otimização for convexo, qualquer ponto que satisfaça as condições de primeira ordem é a solução ótima, ou seja, a condição necessária também é suficiente. Caso contrário, é preciso encontrar as condições necessárias de segunda ordem para definir se os pontos estacionários encontrados são pontos de mínimo, de máximo ou de inflexão.

Condições necessárias de segunda ordem: Seja x^* um mínimo local de f em \mathcal{S} e um ponto regular de \mathcal{S} . Então existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) = 0_n$$

e que a hessiana

$$\nabla^2 \mathcal{L}(x^*) = \nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla^2 h_i(x^*)$$

seja positiva semidefinida.

Condições suficientes de segunda ordem: Seja x^* um ponto regular de \mathcal{S} que satisfaz as condições necessárias de segunda ordem. Se $\nabla^2 \mathcal{L}(x^*)$ é definida positiva, então x^* é um mínimo local isolado de f em \mathcal{S} .

O problema de otimização não linear com restrição de desigualdade é caracterizado como

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && x \in \mathcal{G} := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0_p\}. \end{aligned}$$

Uma restrição $g_i(x) \leq 0$ está ativa num ponto viável x^0 se $g_i(x^0) = 0$. A restrição está inativa se $g_i(x^0) < 0$.

As condições de otimalidade que envolve restrições de desigualdade podem ser derivadas utilizando-se as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Condições necessárias de primeira ordem de KKT: Seja x^* um mínimo local de f sujeito a $x \in \mathcal{G}$ e defina $\mathcal{I}(x^*) := \{i : g_i(x^*) = 0\}$. Assuma que $\{\nabla g_i(x^*) : i \in \mathcal{I}(x^*)\}$ é linearmente independente. Então, existe um vetor $\mu^* \in \mathbb{R}_+^p$, tal que,

$$\begin{aligned} \mu_i^* g_i(x^*) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \\ \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i^* \nabla g_i(x^*) &= 0_n. \end{aligned}$$

Analogamente ao problema cuja restrição é de igualdade, se o problema de otimização for convexo, qualquer ponto que satisfaça as condições de primeira ordem é a solução ótima.

Condições necessárias de segunda ordem de KKT: Se as funções f e g possuem todas as derivadas de segunda ordem, x^* é um ponto regular das restrições e, também, é um mínimo local do problema, então existem escalares μ_i tal que

$$\begin{aligned}\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(x^*) &= 0_n, \\ \mu_i &\geq 0, \quad \mu_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \\ \nabla^2 \mathcal{L}(x^*) &= \nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla^2 g_i(x^*) \geq 0,\end{aligned}$$

isto é, a hessiana $\nabla^2 \mathcal{L}(x^*)$ precisa ser positiva semidefinida.

Condições suficientes de segunda ordem de KKT: Sejam f e g funções que possuem todas as derivadas de segunda ordem. A condição suficiente para que x^* seja mínimo local do problema é que existam escalares μ_i , tal que

$$\begin{aligned}\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(x^*) &= 0_n, \\ \mu_i &\geq 0, \quad \mu_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \\ \nabla^2 \mathcal{L}(x^*) &= \nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla^2 g_i(x^*) > 0,\end{aligned}$$

ou seja, $\nabla^2 \mathcal{L}(x^*)$ tem que ser definida positiva.

O problema de otimização (2.11) é dito misto devido a presença de restrições de igualdade e restrições de desigualdade. Assim, o problema de otimização

$$\begin{aligned}\text{minimizar} \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & h(x) = 0_m \quad \text{e} \quad g(x) \leq 0_p,\end{aligned}$$

também pode ser resolvido utilizando as condições de KKT. Logo, suas condições necessárias de primeira e de segunda ordem e a condição suficiente são definidas a seguir.

Seja a função Lagrangiana dada por

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i g_i(x).$$

Condições necessárias de primeira ordem de KKT:

$$\mu_i \geq 0, \quad \lambda_j \text{ qualquer}, \quad \mu_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0_n.$$

Condições necessárias de segunda ordem de KKT:

$$\mu_i \geq 0, \quad \lambda_j \text{ qualquer}, \quad \mu_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0_n,$$

$$\nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) \geq 0, \quad \text{positiva semidefinida.}$$

Condições suficientes de segunda ordem de KKT:

$$\mu_i \geq 0, \quad \lambda_j \text{ qualquer}, \quad \mu_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0_n,$$

$$\nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) > 0, \quad \text{positiva definida.}$$

As provas das condições de otimalidade aqui apresentadas, podem ser encontradas em (Luenberger (1937) e Bazaraa e C.M.Shetty (1943)).

Na próxima seção é apresentado o problema de otimização simultânea, não linear com restrição de igualdade, proposto para se desenvolver as metodologias analíticas.

2.3.2 Problema de Otimização

O problema de otimização proposto é definido como

$$\min_{A, B, K} J$$

sujeito a restrição dinâmica

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

Visto que o funcional de custo J dado por

$$J = \int_0^\infty x'(t) Q x(t) + u'(t) R u(t) dt$$

é quadrático, tem-se que o problema de otimização proposto é não linear.

Neste trabalho são investigadas três metodologias analíticas para a solução do problema de otimização proposto. A primeira delas é a Metodologia Baseada na Resposta Temporal. Nessa metodologia, a solução (2.4) e a lei de controle (2.2) são substituídas na equação do desempenho (2.6), obtendo assim, uma nova expressão para o funcional de custo. Em seguida, este novo funcional de custo é minimizado. A segunda metodologia, que neste trabalho é chamada de Metodologia Quadrática, é desenvolvida a partir do conceito do Problema do Regulador Linear Quadrático, do inglês *Linear Quadratic Regulator* (LQR). Nesta metodologia é usado o processo de otimização não linear, ou seja, são aplicadas as definições do *lagrangiano* e de condições de otimalidade. E, a última, Metodologia Variacional é desenvolvida a partir dos conceitos do Cálculo Variacional.

2.3.3 Metodologia Baseada na Resposta Temporal

Nesta metodologia, utilizando a solução da equação dinâmica dada em (2.4), o problema de otimização restrito, apresentado na seção 2.3.2, é transformado em um problema de otimização irrestrito. Primeiramente são discutidos os problemas de otimização de sistemas em malha aberta e, em seguida, de sistemas em malha fechada.

A partir do problema de otimização, proposto na seção 2.3.2, foi investigado o sistema sem ação de controle, isto é, $K = 0$. Ou seja, tem-se o seguinte problema de otimização

$$\min_A J_{ma}$$

sujeito a

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.13)$$

sendo J_{ma} definido na forma

$$J_{ma} = \int_0^\infty x'(t) Q x(t) dt.$$

Pode-se reescrever o funcional de custo J_{ma} da seguinte forma

$$J_{ma} = \text{Tr} \left[\left(\int_0^\infty x(t) x'(t) dt \right) Q \right].$$

A solução $x(t)$, da restrição (2.13), dada em (2.5), é substituída na equação do funcional de

custo J_{ma} descrita anteriormente, logo, obtém-se

$$J_{ma} = \text{Tr} \left[\left(\int_0^\infty e^{At} x(0) x'(0) e^{A't} dt \right) Q \right]. \quad (2.14)$$

Após substituir a solução $x(t)$ da restrição no custo a ser minimizado, obtém-se o seguinte problema de otimização irrestrito

$$\min_A J_{ma} \quad (2.15)$$

onde o funcional de custo J_{ma} é definido em (2.14).

Para se resolver o problema de otimização (2.15) é necessário obter os pontos estacionários que são dados por

$$\frac{\partial J_{ma}}{\partial A} = 0.$$

Define-se a exponencial da matriz A na seguinte forma

$$e^{At} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} A^s \Rightarrow e^{A't} = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{t^d}{d!} (A')^d.$$

Substituindo-a na equação (2.14) tem-se

$$\begin{aligned} J_{ma} &= \text{Tr} \left[\left(\int_0^\infty \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} A^s x(0) x(0)' \sum_{d=0}^{\infty} \frac{t^d}{d!} (A')^d dt \right) Q \right] = \\ &= \text{Tr} \left[\left(\int_0^\infty \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} A^s x(0) x(0)' \frac{t^d}{d!} (A')^d dt \right) Q \right] = \\ &= \text{Tr} \left\{ \left[\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \left(\int_0^\infty \frac{t^s}{s!} \frac{t^d}{d!} dt \right) A^s x(0) x(0)' (A')^d \right] Q \right\}. \end{aligned}$$

Logo, o funcional de custo pode ser reescrito na forma

$$J_{ma} = \text{Tr} \left\{ \left[\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{1}{d!} \left(\int_0^\infty t^{(s+d)} dt \right) A^s x(0) x(0)' (A')^d \right] Q \right\}. \quad (2.16)$$

Define-se a matriz A e A' nas seguintes formas

$$A(\alpha) = A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \Rightarrow A'(\alpha) = A'_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A'_i \quad (2.17)$$

onde α_i são variáveis e as matrizes A_0 , A'_0 , A_i e A'_i são constantes. Substituindo-as no funcional de custo (2.16), tem-se

$$J_{ma} = \text{Tr} \left\{ \left[\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{1}{d!} \left(\int_0^{\infty} t^{(s+d)} dt \right) \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \right)^s x(0) x(0)' \left(A'_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A'_i \right)^d \right] Q \right\}. \quad (2.18)$$

A partir do funcional de custo definido em (2.18), tem-se o problema de otimização irrestrito

$$\min_{\alpha_i} J_{ma}$$

Para se resolver este problema é necessário obter os pontos estacionários. Como as variáveis do problema são α_i , esses pontos são calculados da seguinte forma

$$\frac{\partial J_{ma}}{\partial \alpha_j} = 0.$$

Portanto, tem-se

$$\frac{\partial J_{ma}}{\partial \alpha_j} = \text{Tr} \left\{ \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{1}{d!} \left(\int_0^{\infty} t^{(s+d)} dt \right) \left[\frac{\partial (A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i)^s}{\partial \alpha_j} x(0) x(0)' \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left(A'_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A'_i \right)^d + \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \right)^s x(0) x(0)' \frac{\partial (A'_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A'_i)^d}{\partial \alpha_j} \right] \right\} Q \right\} = 0.$$

Quando o sistema está em malha fechada, ou seja, quando $K \neq 0$, tem-se o problema de otimização descrito na seção 2.3.2.

Seja a lei de controle definida na equação (2.2), pode-se escrever o índice de desempenho (2.6) na seguinte forma

$$J_{mf} = \int_0^{\infty} x'(t) Q x(t) + [-K x(t)]' R [-K x(t)] dt = \int_0^{\infty} x'(t) (Q + K' R K) x(t) dt. \quad (2.19)$$

Reescrevendo o funcional de custo (2.19), tem-se

$$J_{mf} = \text{Tr} \left[\left(\int_0^{\infty} x(t) x'(t) dt \right) (Q + K' R K) \right].$$

A solução $x(t)$, da restrição (2.1), dada em (2.4), é substituída na equação do funcional de custo J_{mf} descrita anteriormente, logo, obtém-se

$$J_{mf} = \text{Tr} \left[\left(\int_0^{\infty} e^{(A-BK)t} x(0) x'(0) e^{(A-BK)'t} dt \right) (Q + K' R K) \right]. \quad (2.20)$$

Após substituir a solução $x(t)$ da restrição no custo a ser minimizado, obtém-se o seguinte problema de otimização irrestrito

$$\min_{A,B,K} J_{mf}$$

onde J_{mf} é definido em (2.20).

Para se resolver este problema de otimização é necessário obter os pontos estacionários que são calculados a partir das seguintes condições de otimalidade

$$\frac{\partial J_{mf}}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial J_{mf}}{\partial B} = 0, \quad \frac{\partial J_{mf}}{\partial K} = 0.$$

Definindo a exponencial da matriz $(A - BK)$ na seguinte forma

$$e^{(A-BK)t} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} (A - BK)^s \Rightarrow e^{(A-BK)'t} = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{t^d}{d!} [(A - BK)']^d. \quad (2.21)$$

Substituindo a expressão (2.21) na equação (2.20) obtém-se

$$\begin{aligned} J_{mf} &= \text{Tr} \left[\left(\int_0^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} (A - BK)^s x(0) x(0)' \sum_{d=0}^{\infty} \frac{t^d}{d!} [(A - BK)']^d dt \right) (Q + K'RK) \right] = \\ &= \text{Tr} \left[\left(\int_0^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} (A - BK)^s x(0) x(0)' \frac{t^d}{d!} [(A - BK)']^d dt \right) (Q + K'RK) \right] = \\ &= \text{Tr} \left\{ \left[\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{t^s}{s!} \frac{t^d}{d!} dt \right) (A - BK)^s x(0) x(0)' [(A - BK)']^d \right] (Q + K'RK) \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, o funcional de custo pode ser reescrito na forma

$$J_{mf} = \text{Tr} \left\{ \left[\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{1}{d!} \left(\int_0^{\infty} t^{(s+d)} dt \right) (A - BK)^s x(0) x(0)' [(A - BK)']^d \right] (Q + K'RK) \right\}. \quad (2.22)$$

Definindo as matrizes A e A' como em (2.17) e substituindo-as no funcional de custo (2.22), obtem-se

$$\begin{aligned} J_{mf} &= \text{Tr} \left\{ \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{1}{d!} \left(\int_0^{\infty} t^{(s+d)} dt \right) \left[\left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \right) - BK \right]^s x(0) x(0)' \right. \right. \\ &\quad \left. \left[\left(\left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \right) - BK \right)' \right]^d \right\} (Q + K'RK) \right\}. \quad (2.23) \end{aligned}$$

Neste caso, considera-se a matriz B constante. Com isso, as variáveis do problema são α_i e K .

A partir do funcional de custo obtido em (2.23), tem-se o seguinte problema de otimização irrestrito

$$\min_{\alpha_i, K} J_{mf}$$

Para se resolver este problema de otimização é necessário obter os pontos estacionários que, como as variáveis do problema são α_i e K , são calculados da seguinte forma

$$\frac{\partial J_{mf}}{\partial \alpha_j} = 0, \quad \frac{\partial J_{mf}}{\partial K} = 0.$$

Então tem-se, respectivamente,

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{1}{d!} \left(\int_0^{\infty} t^{(s+d)} dt \right) \left\{ \frac{\partial (A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK)^s}{\partial \alpha_j} x(0) x(0)' \right. \right. \\ \left. \left[\left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right)' \right]^d + d \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right)^s x(0) x(0)' \right. \\ \left. \left. \frac{\partial \left[(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK)' \right]^d}{\partial \alpha_j} \right\} (Q + K' RK) \right\} = 0, \\ \text{Tr} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{1}{d!} \left(\int_0^{\infty} t^{(s+d)} dt \right) \left[\frac{\partial (A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK)^s}{\partial K} x(0) x(0)' \right. \right. \\ \left. \left[\left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right)' \right]^d (Q + K' RK) + \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right)^s x(0) x(0)' \right. \\ \left. \frac{\partial \left[(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK)' \right]^d}{\partial K} (Q + K' RK) + \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right)^s \right. \\ \left. \left. x(0) x(0)' \left[\left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right)' \right]^d \frac{\partial (Q + K' RK)}{\partial K} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Devido as não linearidades das condições de otimalidade encontradas para os problemas de otimização de sistemas em malha aberta e de sistemas em malha fechada, nota-se a dificuldade em encontrar as suas soluções. A obtenção desses pontos de forma analítica resultaria em uma tarefa trabalhosa e a obtenção desses pontos de forma numérica poderia ocasionar problemas de complexidade numérica. Além disso, para se ter certeza de que esses pontos estacionários são de mínimo ou de máximo local, necessita-se encontrar as segundas derivadas do funcional de custo com relação às variáveis do problema, o que resultaria em equações ainda mais complexas de serem

obtidas. Logo, não foi possível usar esta metodologia para se obter uma solução.

2.3.4 Metodologia Quadrática

O problema do regulador quadrático ótimo, apresentado na seção 2.1, limita-se a encontrar o controlador K , com parâmetros da planta constantes, que minimiza um funcional de custo. No problema proposto neste trabalho deseja-se, além de otimizar o controlador, otimizar os parâmetros da estrutura, usando as condições necessárias de otimalidade. Logo, com base no problema do LQR, desenvolveu-se a segunda metodologia.

Nas deduções seguintes, considera-se o seguinte problema de otimização

$$\min_{A(\alpha), K} J_q = \int_0^\infty x'(t, \alpha) \left(Q + K' R K \right) x(t, \alpha) dt \quad (2.24)$$

sujeito a

$$\dot{x}(t, \alpha) = (A(\alpha) - BK) x(t, \alpha), \quad (2.25)$$

onde a matriz $A(\alpha)$ depende da variável α e a matriz B é constante. Supõe-se que a matriz $A(\alpha) - BK$ seja estável.

Fazendo

$$x'(t, \alpha) \left(Q + K' R K \right) x(t, \alpha) = -\frac{d}{dt} \left[x'(t, \alpha) P(\alpha) x(t, \alpha) \right], \quad (2.26)$$

onde a matriz $P(\alpha)$ é positiva semidefinida, ou seja, $P(\alpha) = P(\alpha)' \geq 0$, tem-se

$$x'(t, \alpha) \left(Q + K' R K \right) x(t, \alpha) = - \left[\dot{x}'(t, \alpha) P(\alpha) x(t, \alpha) + x'(t, \alpha)' P(\alpha) \dot{x}(t, \alpha) \right].$$

Substituindo a equação (2.25) na expressão anterior, tem-se

$$x'(t, \alpha) \left(Q + K' R K \right) x(t, \alpha) = -x'(t, \alpha) \left[(A(\alpha) - BK)' P(\alpha) + P(\alpha) (A(\alpha) - BK) \right] x(t, \alpha).$$

Comparando os dois lados da última equação, obtém-se

$$Q + K' R K = - \left[(A(\alpha) - BK)' P(\alpha) + P(\alpha) (A(\alpha) - BK) \right],$$

que é análogo a

$$(A(\alpha) - BK)' P(\alpha) + P(\alpha) (A(\alpha) - BK) + Q + K' RK = 0. \quad (2.27)$$

Considerando o índice de desempenho (2.24) e a relação entre este funcional de custo e a equação (2.26), o índice de desempenho J_q pode ser calculado como

$$\begin{aligned} J_q &= \int_0^\infty x'(t, \alpha) (Q + K' RK) x(t, \alpha) dt = -x'(t, \alpha) P(\alpha) x(t, \alpha) \Big|_0^\infty = \\ &= -x'(\infty, \alpha) P(\alpha) x(\infty, \alpha) + x'(0, \alpha) P(\alpha) x(0, \alpha). \end{aligned}$$

Como se supõe que todos os autovalores de $A(\alpha) - BK$ tenham partes reais negativas, então $x(\infty, \alpha) \rightarrow 0$. Denotando a condição inicial por $x(0, \alpha) = x(0)$, temos

$$J_q = x'(0) P(\alpha) x(0). \quad (2.28)$$

Assim, o índice de desempenho J_q pode ser obtido em termos da condição inicial $x(0)$ e da matriz $P(\alpha)$.

Definido o funcional de custo J_q em (2.28) e a restrição referente à estabilidade do sistema em (2.27), tem-se o seguinte problema de otimização.

$$\min_{A(\alpha), B, K, P(\alpha)} \text{Tr} \left\{ x'(0) P(\alpha) x(0) \right\} \quad (2.29)$$

sujeito a

$$(A(\alpha) - BK)' P(\alpha) + P(\alpha) (A(\alpha) - BK) + Q + K' RK = 0. \quad (2.30)$$

Para se obter as condições de otimalidade é necessário escrever o *lagrangeano* e derivá-lo em relação às variáveis do problema. O *lagrangeano* deste problema é definido da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A(\alpha), K, P(\alpha), \lambda) &= \text{Tr} \left\{ x'(0) P(\alpha) x(0) \right. \\ &\quad \left. + \lambda' \left[(A(\alpha) - BK)' P(\alpha) + P(\alpha) (A(\alpha) - BK) + Q + K' RK \right] \right\}. \end{aligned}$$

Como as variáveis deste problema são $A(\alpha)$, K , $P(\alpha)$ e λ , portanto, as condições de otimalidade são

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A(\alpha)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P(\alpha)} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0.$$

A partir dessas condições de otimalidade, obtém-se as equações algébricas que devem resolvidas simultaneamente para que os pontos estacionários sejam encontrados.

Definindo as matrizes $A(\alpha)$ e $A'(\alpha)$ como em (2.17) e de forma análoga define-se a matriz $P(\alpha)$. Substituindo-as no problema de otimização apresentado em (2.29) sujeito à equação (2.30), tem-se um novo problema de otimização

$$\min_{\alpha_i, K, P_0, P_i} \text{Tr} \left\{ x(0)' \left(P_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i \right) x(0) \right\}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right)' \left(P_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i \right) + \left(P_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i \right) \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right) \\ + Q + K'RK = 0. \end{aligned}$$

O *lagrangeano* deste problema é definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha_i, K, P_0, P_i, \lambda) = \text{Tr} \left\{ x(0)' \left(P_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i \right) x(0) \right. \\ \left. + \lambda' \left[\left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right)' \left(P_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i \right) + \left(P_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i \right) \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right) \right. \right. \\ \left. \left. + Q + K'RK \right] \right\}. \end{aligned}$$

Como as variáveis do problema são α_i , λ , K , P_0 e P_i então tem-se as seguintes condições de otimalidade

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_i} = P_i x(0) x(0)' + \lambda' \left[A_i' \left(P_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i \right) + \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right)' P_i \right. \\ \left. + P_i \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right) + \left(P_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i \right) A_i \right] = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right)' \left(P_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i \right) + \left(P_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i \right) \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right) \\ + Q + K'RK = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = \left[RK - B' \left(P_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i \right) \right] \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_0} = \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right) \lambda + \lambda \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right)' + x(0) x(0)' = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i} = \alpha_i \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right) \lambda + \alpha_i \lambda \left(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - BK \right)' + \alpha_i x(0) x(0)' = 0.$$

As condições de otimalidade, mostradas anteriormente, devem ser resolvidas simultaneamente, de modo a encontrar as variáveis α_i , λ , K , P_0 e P_i que minimizam o índice de desempenho.

Como na Metodologia Baseada na Resposta Temporal, essas condições de otimalidade são de difíceis soluções.

2.3.5 Metodologia Variacional

Esta metodologia tem como objetivo resolver o problema de otimização simultânea, utilizando multiplicadores de Lagrange e o Cálculo Variacional (Bryson e Ho (1975)).

Para desenvolver a Metodologia Variacional é necessário fazer uma breve explanação sobre Derivadas Direcionais.

O cálculo diferencial de funções de n variáveis trata de funções do espaço \mathbb{R}^n em \mathbb{R} . O cálculo variacional trata de funcionais, especificamente aqueles definidos em um espaço vetorial de funções, ao invés do espaço vetorial \mathbb{R}^n . Em poucas palavras, pode-se dizer que o cálculo variacional é o cálculo diferencial de funcionais.

Um dos conceitos importantes do cálculo diferencial de funções é o de derivada. No caso de funções com mais de uma variável surgem as derivadas direcionais (as derivadas parciais são derivadas direcionais particulares). O conceito de derivada funcional (ou variacional) desempenha, para funcionais, o mesmo papel que o conceito de derivada direcional desempenha para funções de n variáveis.

A derivada direcional de uma função $f(x)$ na direção \vec{v} é dada por

$$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h\vec{v}) - f(x)}{h}$$

no pressuposto de que o limite exista, onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ e $h \in \mathbb{R}$.

Na notação de Leibnitz a derivada direcional pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = \left. \frac{\partial}{\partial h} f(x + h\vec{v}) \right|_{h=0}$$

A partir da definição de derivada direcional, a derivada variacional de um funcional de custo Z relativo a $\vec{\eta}$ é dada por

$$\delta_{\vec{\eta}} Z[q] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Z[q + \varepsilon \vec{\eta}] - Z[q]}{\varepsilon} = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Z[q + \varepsilon \vec{\eta}] \right|_{\varepsilon=0}, \quad (2.31)$$

desde que o limite exista.

Para desenvolver esta metodologia, é considerado o seguinte sistema LTI

$$\dot{x}(t, \alpha) = f[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t]$$

e a condição inicial dada por

$$x(0, \alpha) = x_0.$$

O objetivo é encontrar α e $u(t, \alpha)$ de modo a minimizar o seguinte critério de custo

$$J_v = \phi[x(t_f, \alpha)] + \int_0^{t_f} L[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] dt \quad (2.32)$$

onde o tempo final, $t_f < \infty$, é especificado e $\phi[x(t_f, \alpha)]$ representa um custo final.

Impondo a seguinte restrição

$$f[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] - \dot{x}(t, \alpha) = 0,$$

ao funcional de custo J_v , definido em (2.32), usando o multiplicador de Lagrange $\lambda(t, \alpha)$, obtém-se

$$J_v = \phi[x(t_f, \alpha)] + \int_0^{t_f} \left\{ L[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] + \lambda'(t, \alpha) \{ f[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] - \dot{x}(t, \alpha) \} \right\} dt,$$

que pode ser reescrito na forma

$$J_v = \phi[x(t_f, \alpha)] + \int_0^{t_f} \left\{ H[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] - \lambda'(t, \alpha) \dot{x}(t, \alpha) \right\} dt. \quad (2.33)$$

sendo

$$H[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] = L[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] + \lambda'(t, \alpha) \{ f[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] \}$$

A partir de (2.33) tem-se

$$J_v = \phi[x(t_f, \alpha)] + \int_0^{t_f} H[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] dt - \int_0^{t_f} \lambda'(t, \alpha) \dot{x}(t, \alpha) dt. \quad (2.34)$$

Integrando o último termo de (2.34) por partes, obtém-se

$$J_v = \left\{ \phi[x(t, \alpha)] - \lambda'(t, \alpha) x(t, \alpha) \right\} \Big|_{t=t_f} + \lambda'(t, \alpha) x(t, \alpha) \Big|_{t=0} + \int_0^{t_f} \left\{ H[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] + \dot{\lambda}'(t, \alpha) x(t, \alpha) \right\} dt. \quad (2.35)$$

Se um α e um $u(t, \alpha)$, que minimizam o custo J_v , forem encontrados, as pequenas variações, δ_α em α e δ_u em u , não devem produzir mudanças em J_v , ou seja, deve-se obter $\delta J_v = 0$.

A partir de (2.35) e da definição de derivada variacional de um funcional dada em (2.31), tem-se

$$\delta J_v[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ J_v[u(t, \alpha) + \varepsilon \delta_u, x(t, \alpha) + \varepsilon \delta_x, \alpha + \varepsilon \delta_\alpha] \right\} \Big|_{\varepsilon=0},$$

que pela regra da cadeia, pode ser reescrita na forma

$$\delta J_v[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] = \frac{\partial J_v}{\partial u(t, \alpha)} \delta_u + \frac{\partial J_v}{\partial x(t, \alpha)} \delta_x + \frac{\partial J_v}{\partial \alpha} \delta_\alpha \quad (2.36)$$

Aplicando a equação (2.36) em (2.35), obtém-se

$$\begin{aligned} \delta J_v = & \int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial}{\partial u(t, \alpha)} H[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] \right\} \delta_u dt + \left\{ \frac{\partial}{\partial x(t, \alpha)} \phi[x(t, \alpha)] - \lambda'(t, \alpha) \right\} \delta_x \Big|_{t=t_f} \\ & + \lambda'(t, \alpha) \delta_x \Big|_{t=0} + \int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial}{\partial x(t, \alpha)} H[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] + \dot{\lambda}'(t, \alpha) \right\} \delta_x dt + \\ & + \int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} H[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] \right\} \delta_\alpha dt. \end{aligned}$$

Para que $\delta J_v = 0$, então, tem-se

$$\lambda'(t_f, \alpha) = \frac{\partial}{\partial x(t, \alpha)} \phi[x(t, \alpha)] \Big|_{t=t_f} \quad (2.37)$$

$$\dot{\lambda}'(t, \alpha) = -\frac{\partial}{\partial x(t, \alpha)} H[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial u(t, \alpha)} H[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} H[\alpha, x(t, \alpha), u(t, \alpha), t] = 0. \quad (2.40)$$

Para se obter α e $u(t, \alpha)$ as condições necessárias de primeira ordem, representadas pelas equações (2.37), (2.38), (2.39) e (2.40), devem ser resolvidas.

Quando $\alpha = 0$, recuperam-se as conhecidas equações de Euler-Lagrange.

De acordo com o problema de otimização apresentado na seção 2.3.2 tem-se

$$\begin{aligned}\phi[x(t_f, \alpha)] &= 0, \quad x(0, \alpha) = x_0, \\ L(t, \alpha) &= x'(t, \alpha) Q x(t, \alpha) + u'(t, \alpha) R u(t, \alpha), \\ f(t, \alpha) &= A(\alpha) x(t, \alpha) + B u(t, \alpha).\end{aligned}$$

A partir das condições necessárias de primeira ordem representadas pelas equações (2.37), (2.38), (2.39) e (2.40), obtém-se as condições de otimalidade para o problema de otimização definido neste trabalho, que são

$$\begin{aligned}\lambda(t_f, \alpha) &= 0, \\ \dot{\lambda}(t, \alpha) &= -2Qx(t, \alpha) - A'(\alpha) \lambda(t, \alpha), \\ u(t, \alpha) &= -\frac{1}{2} R^{-1} B' \lambda(t, \alpha), \\ \dot{\lambda}(t, \alpha) \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha} &= 0.\end{aligned}$$

Pode-se escrever as condições de otimalidade definidas anteriormente como um sistema de equações diferenciais, definido a seguir

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t, \alpha) \\ \dot{\lambda}(t, \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\alpha) & -\frac{1}{2} B R^{-1} B' \\ -2Q & -A'(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t, \alpha) \\ \lambda(t, \alpha) \end{bmatrix},$$

com as condições de contorno dadas por

$$x(0, \alpha) = 0, \quad \lambda(t_f, \alpha) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\lambda}(t, \alpha) \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

Nesta seção foram apresentadas as três metodologias analíticas propostas para se resolver o problema de otimização simultânea.

Nas três metodologias, as condições de otimalidade encontradas apresentam não linearidades que dificultam a obtenção das suas soluções. Em particular, na metodologia Analítica é necessário obter as condições de otimalidade de segunda ordem para garantir que os pontos estacionários encontrados são de mínimo ou de máximo.

As dificuldades encontradas para se resolver o problema de otimização de forma analítica

fez com que uma alternativa numérica, para se obter a sua solução, fosse discutida. A metodologia numérica é apresentada na seção a seguir.

2.4 Metodologia Numérica

O artigo Brancík (2008) apresenta seis algoritmos, na linguagem de programação do MATLAB, que calculam a derivada da função exponencial matricial. Esses algoritmos são desenvolvidos a partir das definições de séries de Taylor, matriz aumentada, decomposição em autovalores, transformadas de Laplace, integral de convolução e aproximação de Padé. Neste trabalho é utilizado o algoritmo desenvolvido a partir das séries de Taylor.

Suponha que a função exponencial da matriz $M(\alpha)$, dependente dos parâmetros α , seja denotada por

$$F_m(t, \alpha) = e^{M(\alpha)t}, \quad (2.41)$$

onde t um parâmetro real conhecido. O objetivo é obter a derivada de $F_m(t, \alpha)$, com relação a α , ou seja, deseja-se calcular

$$dF_m(t, \alpha) = \frac{\partial F_m(t, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial e^{M(\alpha)t}}{\partial \alpha}. \quad (2.42)$$

Fornecendo a matriz $M(\alpha)$ e a sua derivada com relação a α , denotada por $dM(\alpha)$, para o Algoritmo 2.2, tirado de Brancík (2008), a função exponencial matricial, $F_m(t, \alpha)$, definida em (2.41), e a sua derivada, $dF_m(t, \alpha)$, definida em (2.42) são calculadas.

Seja a matriz $M_{ab}(\alpha)$ definida como

$$M_{ab}(\alpha) = [A(\alpha) + B(\alpha)]t. \quad (2.43)$$

Então, a partir de (2.41) tem-se a seguinte função exponencial matricial

$$F_{ab}(t, \alpha) = e^{[A(\alpha) + B(\alpha)]t}. \quad (2.44)$$

O objetivo é calcular a derivada da função $F_{ab}(t, \alpha)$, com relação a α , ou seja, deseja-se calcular

Algoritmo 2.2 Derivada da função exponencial matricial

```
function [F,dF] = expmt(M,dM)

[f,e] = log2(norm(M,'inf'));
r = max(0,e+1);
M = M/2^r;
dM = dM/2^r;

%Expansão da série de Taylor da exp(M) e da derivada de expm(M)
FM = eye(size(M));
dFM = dM;
F = FM+M;
dF = dM;
l = 1;
n = 1;
incF = 1;

while incF > 1e-16
    n = n+1;
    l = l*n;
    FM = FM*M;
    dFM = dM*FM+M*dFM;
    dF = dF+dFM/l;
    F = F+FM*M/l;
    incF = sum(sum(abs(FM)+abs(dFM)));
end

for k = 1:r
    dF = dF*F+F*dF;
    F = F*F;
end
```

$$\frac{\partial F_{ab}(t, \alpha)}{\partial \alpha} = dF_{ab}(t, \alpha) = \frac{\partial e^{[A(\alpha) + B(\alpha)]t}}{\partial \alpha}.$$

A partir da matriz $M_{ab}(\alpha)$, definida em (2.43), define-se

$$dM_{ab}(\alpha) = \frac{\partial M_{ab}(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial [A(\alpha) + B(\alpha)]t}{\partial \alpha}. \quad (2.45)$$

Fornecendo as matrizes $M_{ab}(\alpha)$ e $dM_{ab}(\alpha)$ para o Algoritmo 2.2, a função exponencial e a sua derivada numérica, denominadas, respectivamente, de F_{ab_N} e dF_{ab_N} , são calculadas.

Para comprovar a eficiência do Algoritmo 2.2 foram realizados testes que estão descritos no Apêndice A. Esses testes foram divididos em duas seções. Na Seção A.1 foram consideradas matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ que comutam, ou seja, $A(\alpha)B(\alpha) = B(\alpha)A(\alpha)$. Na Seção A.2 foram consideradas matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ que não comutam, isto é, $A(\alpha)B(\alpha) \neq B(\alpha)A(\alpha)$.

Com base nos resultados obtidos, a partir dos testes feitos para matrizes que comutam e para matrizes que não comutam, comprova-se a eficiência do Algoritmo 2.2 em calcular derivadas de funções exponenciais matriciais. Com isso, ele se torna uma ferramenta auxiliar importante no desenvolvimento da metodologia numérica proposta neste trabalho.

Para se resolver numericamente problemas de otimização, uma função do MATLAB que pode ser utilizada é a função *fmincon*. Essa função é usada em casos de otimização não linear com restrição, e tem o objetivo de calcular um valor mínimo de uma função escalar de várias variáveis a partir de uma estimativa inicial. A função *fmincon* possui uma gama ampla de opções (*optimset*) que permitem ajustar o comportamento do algoritmo. Uma dessas opções permite incluir o gradiente da função a ser minimizada, cujas derivadas são calculadas com relação às variáveis do problema. O objetivo desta seção é fornecer uma forma analítica para esse gradiente de forma que possa ser usada pela função *fmincon*.

Considere a função exponencial matricial $F(t, \alpha)$, dada em (2.44), por

$$F(t, \alpha) = e^{[A(\alpha) - B(\alpha)K]t}.$$

Então, a função objetivo J , definida em (2.10), pode ser reescrita como

$$J = \text{Tr} \left\{ \left(Q + K'RK \right) F(t, \alpha) x'(0) x(0) F'(t, \alpha) \right\}.$$

Como as variáveis do problema são α e K , logo os gradientes da função J que devem ser fornecidos, quando pertinente, para a função *fmincon* são

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} \quad \text{e} \quad \frac{\partial J}{\partial K}. \quad (2.46)$$

O gradiente de J com relação a α é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \text{Tr} \left\{ \left(Q + K' R K \right) \frac{\partial \left(F(t, \alpha) x'(0) x(0) F'(t, \alpha) \right)}{\partial \alpha} \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \left(Q + K' R K \right) \left(dF_\alpha(t, \alpha) x'(0) x(0) F'(t, \alpha) + F(t, \alpha) x'(0) x(0) (dF_\alpha(t, \alpha))' \right) \right\}, \end{aligned}$$

onde

$$dF_\alpha(t, \alpha) = \frac{\partial e^{[A(\alpha) - B(\alpha)K]t}}{\partial \alpha}.$$

O gradiente de J com relação a K é dado por

$$\frac{\partial J}{\partial K} = \text{Tr} \left\{ \frac{\partial \left[\left(Q + K' R K \right) \left(F(t, \alpha) x'(0) x(0) F'(t, \alpha) \right) \right]}{\partial K} \right\},$$

isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial K} &= \text{Tr} \left\{ \frac{\partial \left(Q + K' R K \right)}{\partial K} F(t, \alpha) x'(0) x(0) F'(t, \alpha) + \right. \\ &\quad \left. \left(Q + K' R K \right) dF_K(t, \alpha) x'(0) x(0) F'(t, \alpha) + \left(Q + K' R K \right) F(t, \alpha) x'(0) x(0) (dF_K(t, \alpha))' \right\}, \end{aligned}$$

onde

$$dF_K(t, \alpha) = \frac{\partial e^{[A(\alpha) - B(\alpha)K]t}}{\partial K}.$$

Usando a metodologia apresentada neste capítulo, os resultados numéricos são apresentados no Capítulo 3.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo o modelo de suspensão veicular é introduzido. Em seguida, os resultados obtidos a partir do problema de otimização proposto para este modelo são apresentados.

3.1 Aplicação em uma Suspensão Veicular

A suspensão é representada pelo modelo um quarto de veículo da Fig. 3.1. Este modelo é geralmente adequado em estudos preliminares da dinâmica de um veículo de passeio (Elmadany e Abduljabbar (1999) e Fathy et al. (2003)). Apesar de sua simplicidade, o modelo conduz a uma compreensão básica do desempenho de uma suspensão.

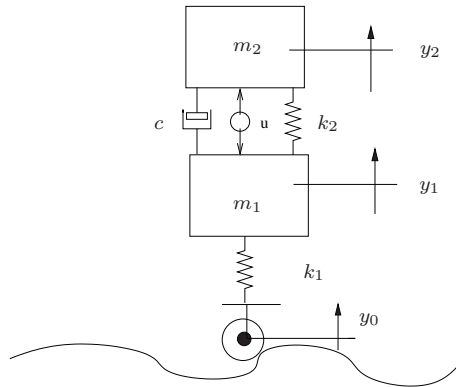


Figura 3.1 - Modelo de um quarto de carro de uma suspensão veicular.

Utilizando-se as leis de Newton, as equações de movimento do sistema são dadas por

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1(t) &= c[\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)] + k_2[y_2(t) - y_1(t)] - k_1[y_1(t) - y_0(t)] - u(t); \\ m_2 \ddot{y}_2(t) &= u(t) - c[\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)] - k_2[y_2(t) - y_1(t)]; \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde a rigidez da mola e o coeficiente de amortecimento da suspensão são, respectivamente, k_2 e c . O pneu é modelado como uma mola de rigidez k_1 . O deslocamento da massa m_1 é $y_1(t)$, o deslocamento da massa m_2 é $y_2(t)$ e $u(t)$ representa uma força de controle ativa. A entrada $y_0(t)$, neste trabalho, é definida como um degrau unitário, ou seja, $y_0(t) = 1, t \geq 0$ e $y_0(t) = 0, t < 0$ e

representa a superfície de rodagem.

A aplicação do degrau unitário no sistema imediatamente comprime a mola do pneu e estabelece um novo patamar para o sistema, logo, é conveniente definir as seguintes variáveis de estado,

$$x_1(t) = y_1(t) - y_0(t), \quad x_2(t) = y_2(t) - y_0(t), \quad x_3(t) = \dot{y}_1(t), \quad x_4(t) = \dot{y}_2(t). \quad (3.2)$$

O sistema (3.1) pode ser representado na forma de estado (2.1), com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1/m_1 - k_2/m_1 & k_2/m_1 & -c/m_1 & c/m_1 \\ k_2/m_2 & -k_2/m_2 & c/m_2 & -c/m_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/m_1 \\ 1/m_2 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Assumindo que o sistema está em repouso, ou seja $y(0) = 0$, os valores iniciais dessas novas variáveis de estado, no instante imediatamente após a mola k_1 ter sido comprimida, são dados por

$$x_1(0) = -1; \quad x_2(0) = -1; \quad x_3(0) = 0; \quad x_4(0) = 0. \quad (3.4)$$

Nos projetos de otimização de suspensões veiculares, os índices geralmente considerados são o conforto do passageiro, a deformação do pneu (dirigibilidade) e o espaço de trabalho da suspensão. Um índice de desempenho muito utilizado na literatura é o índice de desempenho quadrático (Thompson (1976) e Elmadany e Abduljabbar (1999)).

O índice de desempenho quadrático utilizado no processo de otimização do sistema apresentado na Figura 3.1 é definido da seguinte forma

$$J = \int_0^\infty q_3 u^2(t) + q_1 (y_0 - y_1)^2 + q_2 (y_1 - y_2)^2 dt \quad (3.5)$$

onde q_1 , q_2 e q_3 são constantes. A utilização deste critério coloca restrições sobre a força $u(t)$, sobre a amplitude dos movimentos da roda ($y_0 - y_1$) e sobre o espaço de trabalho da suspensão ($y_1 - y_2$). A força $u(t)$ que é proporcional à aceleração vertical de m_2 , é responsável por medir o conforto do passageiro.

Em termos das variáveis de estado (3.2), o índice de desempenho (3.5) pode ser reescrito de forma análoga ao desempenho (2.6), com as matrizes de ponderação Q e R dadas por

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 + q_2 & -q_2 & 0 & 0 \\ -q_2 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = q_3. \quad (3.6)$$

Quando os parâmetros da planta são conhecidos, ou seja, quando m_1 , m_2 , k_1 , k_2 e c são dados, o problema clássico de determinar um ganho de realimentação completa de estado, para o sistema dado em (3.3), que minimiza o índice de desempenho (3.5), é conhecido como o problema do regulador linear quadrático ótimo.

A aplicação numérica deste trabalho é feita usando-se o modelo de suspensão veicular da Fig. 3.1. Para esta aplicação, as massas m_1 e m_2 são constantes e o fator de amortecimento c e as molas de rigidez k_1 e k_2 são variáveis.

A matriz A dada em (3.3) pode ser reescrita como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/m_1 & 1/m_1 & 0 & 0 \\ 1/m_2 & -1/m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/m_1 & 1/m_1 \\ 0 & 0 & 1/m_2 & -1/m_2 \end{bmatrix},$$

onde, $\alpha_1 = k_1$, $\alpha_2 = k_2$ e $\alpha_3 = c$, ou seja

$$A(\alpha) = A_0 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = A_0 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i A_i. \quad (3.7)$$

Considerando a matriz $A(\alpha)$, a matriz B (que neste caso é constante) e a lei de controle $u(t, \alpha) = -Kx(t, \alpha)$, propõe-se o seguinte problema de otimização

$$\min_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, K} J \quad (3.8)$$

sujeito a

$$\dot{x}(t, \alpha) = [A(\alpha) - BK]x(t, \alpha) \quad \text{e restrições sobre} \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$$

com o funcional de custo J dado por

$$J = \text{Tr} \left[\left(Q + K' R K \right) x(t, \alpha) x'(t, \alpha) \right].$$

Substituindo a solução da equação dinâmica do sistema, $x(t, \alpha) = e^{[A(\alpha) - BK]t} x'(0)$, no funcional de custo J obtém-se o seguinte problema de otimização

$$\min_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, K} J \quad (3.9)$$

sujeito a

$$\text{restrições sobre } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$$

com J dado por

$$J = \text{tr} \left\{ \left(Q + K' R K \right) e^{[A(\alpha) - BK]t} x'(0) x(0) e^{[A(\alpha) - BK]t} \right\}. \quad (3.10)$$

As variáveis desse problema são $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]$ e $K = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4]$, logo, quando necessário, os gradientes que devem ser calculados são os definidos em (2.46).

Neste caso, o gradiente de J com relação à α é dado por

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \text{Tr} \left\{ \left(Q + K' R K \right) \left(dF_\alpha(t, \alpha) x'(0) x(0) F'(t, \alpha) + F(t, \alpha) x'(0) x(0) (dF_\alpha(t, \alpha))' \right) \right\} \quad (3.11)$$

e o gradiente de J com relação à K é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial K} = \text{Tr} \left\{ \frac{\partial (Q + K' R K)}{\partial K} F(t, \alpha) x'(0) x(0) F'(t, \alpha) + \right. \\ \left. (Q + K' R K) dF_K(t, \alpha) x'(0) x(0) F'(t, \alpha) + (Q + K' R K) F(t, \alpha) x'(0) x(0) (dF_K(t, \alpha))' \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

com

$$F(t, \alpha) = e^{[A(\alpha) - BK]t}, \quad dF_\alpha(t, \alpha) = \frac{\partial e^{[A(\alpha) - BK]t}}{\partial \alpha} \quad \text{e} \quad dF_K(t, \alpha) = \frac{\partial e^{[A(\alpha) - BK]t}}{\partial K}.$$

Este problema é resolvido utilizando-se duas estratégias de otimização, a estratégia iterativa (Algoritmo 3.1) e a estratégia simultânea.

A estratégia simultânea é análoga ao problema de otimização proposto em (3.9), onde os parâmetros da planta, α_1 , α_2 e α_3 , e os parâmetros do controlador, K , são otimizados simultanea-

Algoritmo 3.1 Aplicação: Estratégia Iterativa

1. Considerando o sistema em malha aberta, ou seja, $K = 0$, e a partir de valores iniciais dados para os parâmetros que serão otimizados, tem-se o problema de otimização

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} J \\ \text{sujeito a } & \dot{x}(t, \alpha) = A(\alpha) x(t, \alpha) \quad \text{e restrições sobre } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \end{aligned}$$

onde a matriz $A(\alpha)$ é definida em (3.7).

2. Para os parâmetros ótimos da planta, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, é projetado o controlador LQR, K_{lqr} .

3. Usando K , obtido no passo anterior, tem-se o problema de otimização

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} J \\ \text{sujeito a } & \dot{x}(t, \alpha) = [A(\alpha) - BK] x(t, \alpha) \quad \text{e restrições sobre } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \end{aligned}$$

cujas condições iniciais dos parâmetros a ser otimizados são os valores obtidos anteriormente.

4. Voltar ao passo 2.

mente, a partir de valores iniciais dados para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e K .

Essas estratégias são resolvidas utilizando-se a função *fmincon*. Primeiramente, o gradiente da função objetivo com relação às variáveis do problema, na forma analítica, representados pelas expressões (3.11) e (3.12), são fornecidos. Em seguida, a função *fmincon* é utilizada usando-se a opção *default* do programa, onde o gradiente da função objetivo é calculado por diferenças finitas.

Nesse trabalho, os custos obtidos pela estratégia iterativa, utilizando-se a fórmula analítica do gradiente da função objetivo e sem utilizar a fórmula analítica, são, respectivamente, denominados por $J_{ite_{on}}$ e $J_{ite_{off}}$. No caso da estratégia simultânea, os custos obtidos utilizando-se a expressão analítica do gradiente é denominado por $J_{sim_{on}}$, caso contrário, sem utilizar a fórmula analítica, o custo é chamado de $J_{sim_{off}}$.

Os resultados foram obtidos a partir de dois valores iniciais para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, aqui denominados de parâmetros nominais. Primeiramente foram considerados valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ retirados da literatura. Depois, esses valores foram otimizados e passaram a ser considerados os parâmetros nominais do problema (Algoritmo 3.2).

A partir dos parâmetros nominais, o controlador LQR é projetado. Dessa forma, obtém-se o valor do custo para esses parâmetros, denominado de J_{lqr} (Algoritmo 3.3).

Todos os custos citados foram calculados e comparados, com o objetivo de comprovar que a inserção de uma fórmula analítica para o gradiente traz melhorias para os resultados dos problemas de otimização. A seguir são apresentados os resultados numéricos do problema de otimização

Algoritmo 3.2 Aplicação: Parâmetros Otimizados

1. Considerando o sistema em malha aberta, ou seja, $K = 0$, e a partir de valores retirados da literatura para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, tem-se o problema de otimização

$$\min_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} J$$

sujeito a $\dot{x}(t, \alpha) = A(\alpha)x(t, \alpha)$ e restrições sobre $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,

onde a matriz $A(\alpha)$ é definida em (3.7).

2. Assim, obtém-se os novos parâmetros nominais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Algoritmo 3.3 Aplicação: Custo J_{lqr}

1. Dados os valores nominais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, projeta-se o controlador LQR, K_{lqr} .

2. A partir dos valores nominais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e do controlador K_{lqr} , obtém-se o custo J_{lqr} .

proposto para a suspensão veicular.

3.2 Resultados

Nesta seção, os resultados obtidos para o problema de otimização proposto para a suspensão veicular representada na Fig. 3.1 são apresentados.

Como mencionado anteriormente, duas estratégias de otimização, estratégia iterativa e estratégia simultânea, foram estudadas para se resolver o problema de otimização definido em (3.8). Para obter esses resultados, as simulações numéricas foram feitas utilizando a função de otimização *fmincon* presente no *software* MATLAB.

Os dados nominais da suspensão foram retirados de Thompson (1976). Em particular, no problema proposto as massas m_1 e m_2 são parâmetros fixos, isto é, são parâmetros não otimizáveis, e tem os seguintes valores

$$m_1 = 28,58 \text{ kg}; \quad m_2 = 288,9 \text{ kg}.$$

Os parâmetros que serão otimizados são a rigidez da mola k_1 , a rigidez da mola k_2 e o fator de amortecimento c , que são, respectivamente, dados por

$$\alpha_1 = 155.900 \text{ N/m}; \quad \alpha_2 = 19.960 \text{ N/m} \quad \text{e} \quad \alpha_3 = 1.300 \text{ Ns/m}. \quad (3.13)$$

O controlador nominal é $K_{nom} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$, ou seja, tem-se que o sistema inicial está em malha aberta.

As condições iniciais $x(0)$ são dadas em (3.4). E as matrizes de ponderação Q e R são definidas em (3.6), sendo $q_1 = 10$, $q_2 = 1$ e $q_3 = 0,8 \times 10^{-9}$.

O intervalo de tempo utilizado em todas as simulações foi de 0 a 5 segundos, com discretização de 10^{-5} segundos.

As restrições sobre os parâmetros da planta foram definidas como

$$0,5\alpha_1 \leq \alpha_1 \leq 1,5\alpha_1, \quad 0,5\alpha_2 \leq \alpha_2 \leq 1,5\alpha_2, \quad 0,5\alpha_3 \leq \alpha_3 \leq 1,5\alpha_3,$$

sobre os valores nominais dados em (3.13).

Como citado anteriormente, as estratégias de otimização foram desenvolvidas a partir de dois parâmetros nominais. Primeiramente foram utilizados os parâmetros retirados na literatura, definidos em (3.13). Em seguida, esses parâmetros foram otimizados, e os novos parâmetros obtidos passaram a ser considerados os parâmetros nominais (Algoritmo 3.2). Assim, os resultados foram divididos em duas seções.

3.2.1 Parâmetros Nominais Retirados da Literatura

Primeiramente, a estratégias iterativa e a estratégia simultânea foram desenvolvidas a partir dos parâmetros nominais retirados da literatura. Estes resultados são mostrados a seguir.

A partir dos valores nominais dados em (3.13), e considerando o sistema inicial em malha aberta, o custo nominal, J_{nom} , foi calculado. Utilizando esses mesmos parâmetros nominais, o controlador K_{lqr} foi projetado (Algoritmo 3.3). Assim, obteve-se o custo J_{lqr} . A Tab.3.1 mostra os valores obtidos para esses custos. A Tab. 3.2 mostra os parâmetros dos controladores K_{nom} e K_{lqr} .

Tabela 3.1 - Custos J_{nom} e J_{lqr} .

Custos	Valores
J_{nom}	0,275672
J_{lqr}	0,208357

Como mencionado, dentro da função *fmincon* é possível inserir opções que auxiliam na solu-

Tabela 3.2 - Controladores K_{nom} e K_{lqr} .

Ganhos	K_1	K_2	K_3	K_4
K_{nom}	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
K_{lqr}	-51.153,7473	20.640,5123	-532,1107	2.967,0308

ção do problema de otimização. Uma dessas opções é a introdução ou não de uma fórmula analítica para o gradiente da função objetivo. No problema de otimização aqui estudado, primeiramente, a expressão do gradiente é fornecida. Assim, o custo obtido pela estratégia iterativa (Algoritmo 3.1), $J_{ite_{on}}$, e o custo obtido pela estratégia simultânea, $J_{sim_{on}}$, foram calculados e estão apresentados na Tab.3.3.

Tabela 3.3 - Custos $J_{ite_{on}}$ e $J_{sim_{on}}$.

Custos	Valores
$J_{ite_{on}}$	0,174547
$J_{sim_{on}}$	0,175137

Após os processos de otimização, os valores para os parâmetros da planta e do controlador de cada estratégia foram obtidos. A Tab. 3.4 e a Tab. 3.5 mostram, respectivamente, os valores dos parâmetros da planta $\alpha_{ite_{on}}$ e $\alpha_{sim_{on}}$, e os valores dos controladores $K_{ite_{on}}$ e $K_{sim_{on}}$.

Tabela 3.4 - Parâmetros da planta $\alpha_{ite_{on}}$ e $\alpha_{sim_{on}}$.

Parâmetros	α_1	α_2	α_3
$\alpha_{ite_{on}}$	233.850	23.049	1.950
$\alpha_{sim_{on}}$	233.808	29.309	1.950

Tabela 3.5 - Controladores $K_{ite_{on}}$ e $K_{sim_{on}}$.

Ganhos	K_1	K_2	K_3	K_4
$K_{ite_{on}}$	-33.725,3028	14.125,8130	-233,3209	1.398,5930
$K_{sim_{on}}$	-49.230,1698	19.170,5690	-280,1537	1.783,2110

Também foi utilizado o *default* da função *fmincon*. Neste caso, o gradiente da função objetivo foi calculado pela própria função de otimização. Dessa forma, foram calculados os custos $J_{ite_{off}}$ e $J_{sim_{off}}$ mostrados na Tab. 3.6.

Tabela 3.6 - Custos $J_{ite_{off}}$ e $J_{sim_{off}}$.

Custos	Valores
$J_{ite_{off}}$	0,212901
$J_{sim_{off}}$	0,208357

Após os processos de otimização, os parâmetros da planta e do controlador de cada estratégia

foram obtidos. A Tab. 3.7 mostra os valores obtidos para os parâmetros da planta $\alpha_{ite_{off}}$ e $\alpha_{sim_{off}}$. A Tab. 3.8 mostra os valores encontrados para os controladores $K_{ite_{off}}$ e $K_{sim_{off}}$.

Tabela 3.7 - Parâmetros da planta $\alpha_{ite_{off}}$ e $\alpha_{sim_{off}}$.

Parâmetros	α_1	α_2	α_3
$\alpha_{ite_{off}}$	155.900	19.960	1.300
$\alpha_{sim_{off}}$	155.900	19.960	1.300

Tabela 3.8 - Controladores $K_{ite_{off}}$ e $K_{sim_{off}}$.

Ganhos	K_1	K_2	K_3	K_4
$K_{ite_{off}}$	-40.652,1107	14.816,3715	-357,8237	1.824,9788
$K_{sim_{off}}$	-51.153,7473	20.640,5123	-532,1107	2.967,0309

Na Tab. 3.9 estão os tempos computacionais de cada estratégia, considerando e sem considerar a inserção da fórmula analítica do gradiente.

Tabela 3.9 - Tempo computacionais.

Custos	Tempo (s)
$J_{ite_{off}}$	44.381
$J_{ite_{on}}$	273.578
$J_{sim_{off}}$	9.679
$J_{sim_{on}}$	397.010

Para o sistema em malha aberta com os parâmetros nominais retirados da literatura o custo obtido foi $J_{nom} = 0,275672$. Para o sistema com os parâmetros nominais retirados da literatura e o controlador K_{lqr} o custo obtido foi $J_{lqr} = 0,208357$. Com a otimização iterativa foram obtidos os custos $J_{ite_{off}} = 0,212901$ e $J_{ite_{on}} = 0,174547$. Com a otimização simultânea dos parâmetros da planta e do controlador os custos obtidos foram $J_{sim_{off}} = 0,208357$ e $J_{sim_{on}} = 0,175137$. Assim, observa-se que o menor custo foi obtido com a estratégia iterativa usando a formulação analítica do gradiente.

3.2.2 Parâmetros Nominais Otimizados

Nesta seção, a estratégia iterativa e a estratégia simultânea foram desenvolvidas a partir dos parâmetros otimizados. Ou seja, os parâmetros dados em (3.13) foram otimizados, e esses novos valores obtidos passaram a ser considerados os valores nominais (Algoritmo 3.2).

A partir do Algoritmo 3.2, após a otimização dos parâmetros (3.13), os novos parâmetros nominais otimizados passaram a ser

$$\alpha_1 = 233.850 \text{ N/m}; \quad \alpha_2 = 19.156,3386 \text{ N/m} \quad \text{e} \quad \alpha_3 = 1.950 \text{ Ns/m}. \quad (3.14)$$

A partir dos valores nominais dados em (3.14), e considerando o sistema inicial em malha aberta, o custo nominal, J_{nom} , foi calculado. Utilizando esses mesmos parâmetros nominais, o controlador K_{lqr} foi projetado (Algoritmo 3.3). Assim, obteve-se o custo J_{lqr} . A Tab. 3.10 mostra os valores obtidos para esses custos. E a Tab. 3.11 mostra os valores dos parâmetros dos controladores K_{nom} e K_{lqr} .

Tabela 3.10 - Custos J_{nom} e J_{lqr} .

Custos	Valores
J_{nom}	0,198491
J_{lqr}	0,172701

Tabela 3.11 - Controladores K_{nom} e K_{lqr} .

Ganhos	K_1	K_2	K_3	K_4
K_{nom}	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
K_{lqr}	-42.411,8433	21.055,1685	-300,4517	2.303,2426

Observa-se que já houve uma melhora de desempenho quando comparado aos resultados da Tab. 3.1.

Fornecendo para a função *fmincon* as expressões analíticas para o gradiente da função objetivo, o custo obtido pela estratégia iterativa (Algoritmo 3.1), $J_{ite_{on}}$, e o custo obtido pela estratégia simultânea, $J_{sim_{on}}$, foram calculados e estão apresentados na Tab. 3.12.

Após os processos de otimização os valores para os parâmetros da planta e do controlador foram obtidos. A Tab. 3.13 e a Tab. 3.14 mostram, respectivamente, os valores dos parâmetros da planta $\alpha_{ite_{on}}$ e $\alpha_{sim_{on}}$, e os valores dos controladores $K_{ite_{on}}$ e $K_{sim_{on}}$.

Tabela 3.12 - Custos $J_{ite_{on}}$ e $J_{sim_{on}}$.

Custos	Valores
$J_{ite_{on}}$	0,174547
$J_{sim_{on}}$	0,172577

Tabela 3.13 - Parâmetros da planta $\alpha_{ite_{on}}$ e $\alpha_{sim_{on}}$.

Parâmetros	α_1	α_2	α_3
$\alpha_{ite_{on}}$	233.850	23.052,3029	1.950
$\alpha_{sim_{on}}$	233.850	21.967,2987	1.950

Tabela 3.14 - Controladores $K_{ite_{on}}$ e $K_{sim_{on}}$.

Ganhos	K_1	K_2	K_3	K_4
$K_{ite_{on}}$	-33.724,9204	14.125,2533	-233,3190	1.398,5728
$K_{sim_{on}}$	-42.411,9944	21.055,4108	-294,1001	2.296,0332

Utilizando o *default* da função *fmincon*, os custos $J_{ite_{off}}$ e $J_{sim_{off}}$ foram calculados e são mostrados na Tab. 3.15.

Tabela 3.15 - Custos $J_{ite_{off}}$ e $J_{sim_{off}}$.

Custos	Valores
$J_{ite_{off}}$	0,174704
$J_{sim_{off}}$	0,172701

Após os processos de otimização, os parâmetros da planta e do controlador de cada estratégia foram obtidos. A Tab. 3.16 mostra os valores obtidos para os parâmetros da planta $\alpha_{ite_{off}}$ e $\alpha_{sim_{off}}$. E a Tab. 3.17 mostra os valores encontrados para os controladores $K_{ite_{off}}$ e $K_{sim_{off}}$.

Tabela 3.16 - Parâmetros da planta $\alpha_{ite_{off}}$ e $\alpha_{sim_{off}}$.

Parâmetros	α_1	α_2	α_3
$\alpha_{ite_{off}}$	233.850	19.156,3386	1.950
$\alpha_{sim_{off}}$	233.850	19.156,3386	1.950

Tabela 3.17 - Controladores $K_{ite_{off}}$ e $K_{sim_{off}}$.

Ganhos	K_1	K_2	K_3	K_4
$K_{ite_{off}}$	-34.317,3017	15.001,0357	-236,0652	1.430,8960
$K_{sim_{off}}$	-42.411,8434	21.055,1685	-300,4517	2.303,2426

Na Tab. 3.18 estão os tempos computacionais de cada estratégia, considerando ou não a inserção da fórmula analítica do gradiente.

Nota-se que, todos os resultados obtidos a partir dos parâmetros otimizados foram melhores do que os resultados obtidos a partir dos parâmetros definidos em (3.13). Por outro lado, o

Tabela 3.18 - Tempo computacionais.

Custos	Tempo (s)
$J_{ite_{off}}$	61.611
$J_{ite_{on}}$	276.289
$J_{sim_{off}}$	31.978
$J_{sim_{on}}$	98.857

processo de otimização para os parâmetros da planta fez com que o tempo computacional fosse significativamente maior. Exceto no caso da estratégia simultânea, no qual a formulação analítica do gradiente foi fornecida.

Para o sistema em malha aberta com os parâmetros nominais otimizados o custo obtido foi $J_{nom} = 0,198491$. Para o sistema com os parâmetros otimizados e o controlador K_{lqr} o custo obtido foi $J_{lqr} = 0,172701$. Com a otimização iterativa foram obtidos os custos $J_{ite_{off}} = 0,174704$ e $J_{ite_{on}} = 0,174547$. Com a otimização simultânea dos parâmetros da planta e do controlador os custos obtidos foram $J_{sim_{off}} = 0,172701$ e $J_{sim_{on}} = 0,172577$.

A inserção de uma expressão analítica para o gradiente da função objetivo, como opção para a função *fmincon*, fez com que os resultados obtidos para os custos da estratégia iterativa e da estratégia simultânea fossem melhores do que quando esse mesmo gradiente é calculado pela própria função de otimização através de diferenças finitas.

Como esperado, após incorporar o gradiente da função objetivo, o resultado obtido com a estratégia simultânea é melhor do que o resultado obtido com a estratégia iterativa. No entanto, como o problema de otimização proposto é não convexo, não é possível afirmar que essa solução é global.

A seguir são mostrados os gráficos de resposta ao degrau das variáveis de estado, definidas em (3.2), em função do tempo. Assim, são analisados os gráficos de $x_1(t)$, que representa a deformação do pneu, amplitude dos movimentos da roda (dirigibilidade), em função do tempo, e os gráficos de $x_2(t)$, que representa o movimento de todo o sistema, em função do tempo.

A Fig. 3.2 e a Fig. 3.3 mostram as respostas ao degrau unitário da suspensão veicular para o sistema com os parâmetros nominais da planta em malha aberta e para o sistema com os mesmos parâmetros da planta, porém em malha fechada, cujo controlador é o K_{lqr} . A Fig. 3.2 mostra a resposta ao degrau unitário de $x_1(t)$ em função do tempo. A Fig. 3.3 mostra a resposta de $x_2(t)$ em função do tempo.

Na Fig. 3.2 e na Fig. 3.3 percebe-se um maior *overshoot* para o sistema com os parâmetros

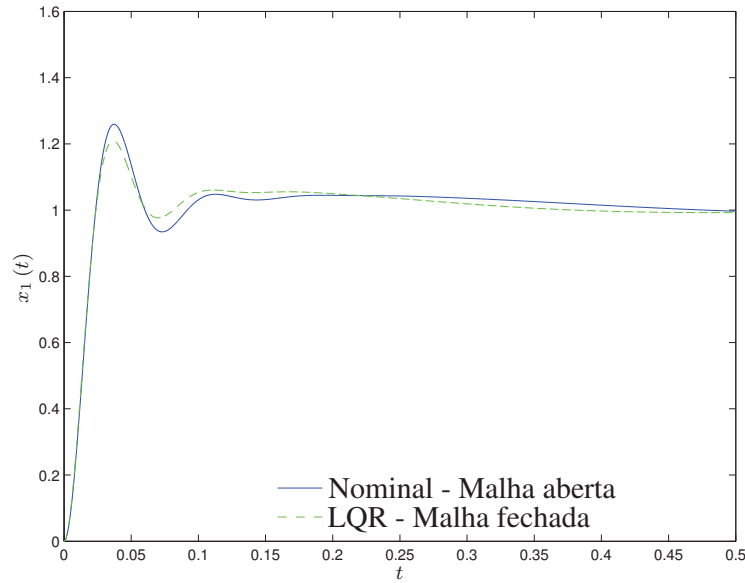


Figura 3.2 - Curvas $x_1(t)$ de resposta ao degrau - Nominal e LQR.

nominais em malha aberta. Essa diferença no *overshoot* é ainda maior na Fig. 3.3.

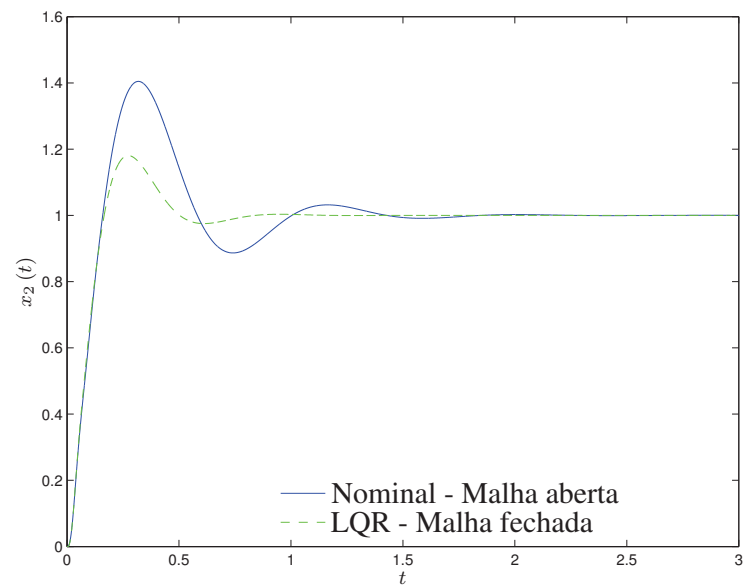


Figura 3.3 - Curvas $x_2(t)$ de resposta ao degrau - Nominal e LQR.

A Fig. 3.4 e a Fig. 3.5 mostram as respostas ao degrau unitário da suspensão veicular para o sistema com os parâmetros nominais da planta em malha aberta, para o sistema cujos parâmetros da planta e do controlador foram otimizados iterativamente e para o sistemas cujos parâmetros da

planta e do controlador foram otimizados simultâneamente. Nesses casos, a expressão analítica do gradiente da função objetivo foi fornecida para a função de otimização *fmincon*. A Fig. 3.4 mostra a resposta ao degrau unitário de $x_1(t)$ em função do tempo. E a Fig.3.5 mostra a resposta de $x_2(t)$ em função do tempo.

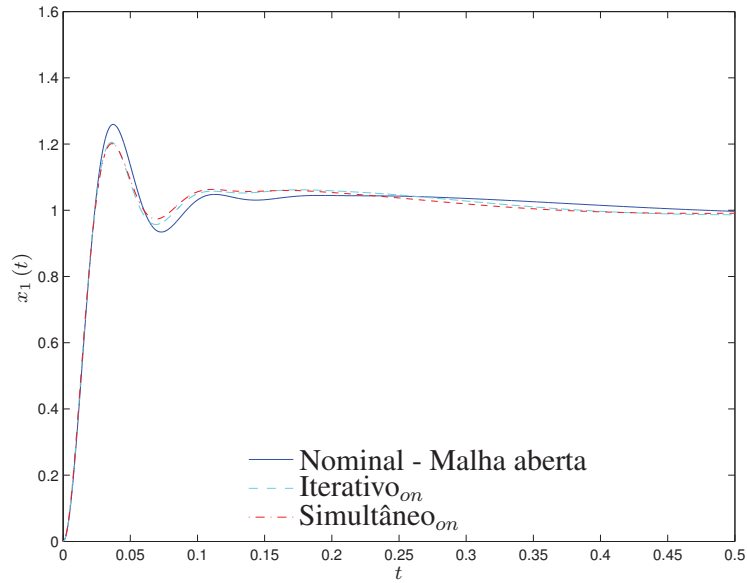


Figura 3.4 - Curvas $x_1(t)$ de resposta ao degrau - Nominal, Iterativo e Simultâneo com o gradiente.

Os sistemas representados na Fig. 3.4 possuem valores de pico e tempo de acomodação bem próximos. Já na Fig. 3.5 essas diferenças são mais perceptíveis. Nota-se um maior *overshoot* e um tempo de acomodação maior para o sistema com os parâmetros nominais em malha aberta, seguido do sistema cujos parâmetros da planta e do controlador foram otimizados iterativamente e do sistema cujos parâmetros da planta e do controlador foram otimizados simultaneamente.

A Fig. 3.6 e a Fig. 3.7 mostram as respostas ao degrau unitário da suspensão veicular para os seguintes sistemas: com os parâmetros nominais da planta em malha aberta, para o sistema cujos parâmetros da planta e do controlador foram otimizados iterativamente. *Iterativo_{on}* e *Iterativo_{off}* denotam, respectivamente, se a fórmula analítica do gradiente foi ou não utilizada. A Fig. 3.6 e a Fig.3.7 mostram, respectivamente, a resposta ao degrau unitário de $x_1(t)$ em função do tempo e a resposta ao degrau unitário de $x_2(t)$ em função do tempo.

Na Fig. 3.6, percebe-se que há pouca diferença entre os *overshoots* e os tempos de acomodações dos sistemas. Na Fig. 3.7 essas diferenças são mais acentuadas.

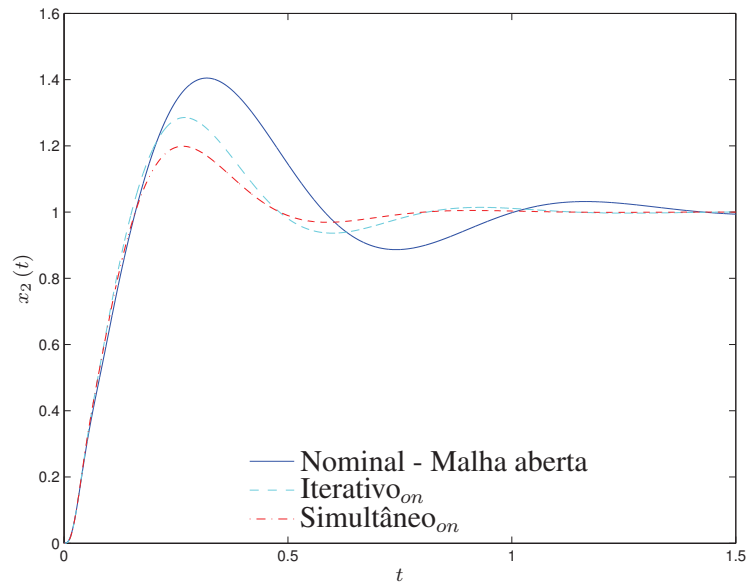


Figura 3.5 - Curvas $x_2(t)$ de resposta ao degrau - Nominal, Iterativo e Simultâneo com o gradiente.

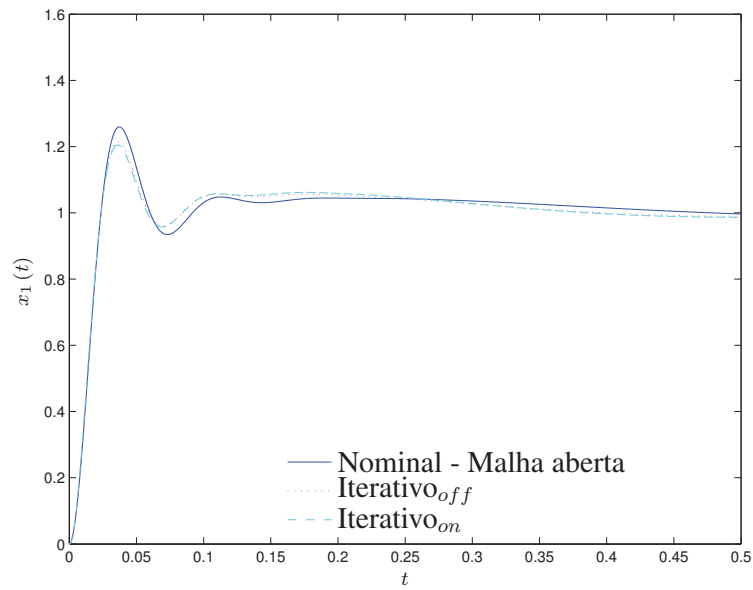


Figura 3.6 - Curvas $x_1(t)$ de resposta ao degrau - Nominal e Iterativo sem e com o gradiente.

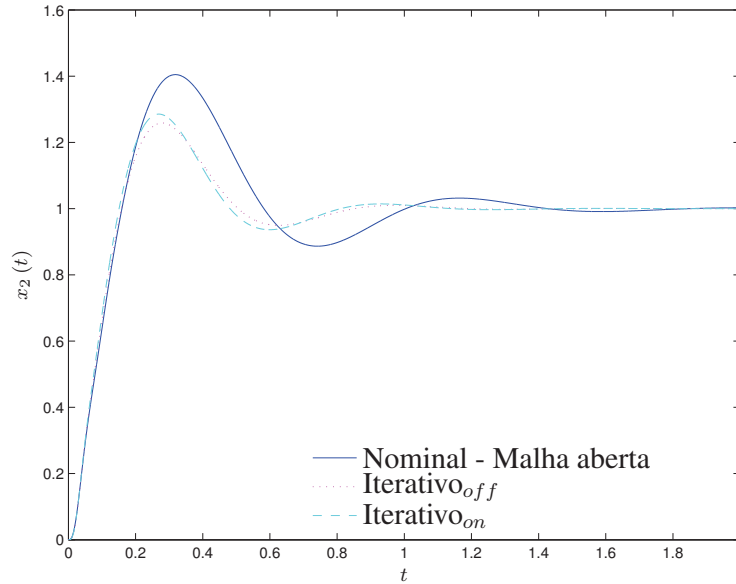


Figura 3.7 - Curvas $x_2(t)$ de resposta ao degrau - Nominal e Iterativo sem e com o gradiente.

A Fig. 3.8 e a Fig. 3.9 mostram as respostas ao degrau unitário da suspensão veicular para os seguintes sistemas: com os parâmetros nominais da planta em malha aberta, para o sistema cujos parâmetros da planta e do controlador foram otimizados simultaneamente. Simultâneo_{on} e Simultâneo_{off} denotam, respectivamente, se a fórmula analítica do gradiente foi ou não utilizada. A Fig. 3.8 e a Fig. 3.9 mostram, respectivamente, as respostas ao degrau unitário de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ em função do tempo.

Na Fig. 3.8 nota-se poucas diferenças entre os sistemas. Na Fig. 3.9, os sistemas que sofreram a otimização simultânea, fornecendo ou não o gradiente, possuem valores de picos e tempos de acomodação bem próximos.

A Fig. 3.10 e a Fig. 3.11 mostram as respostas ao degrau unitário da suspensão veicular para o sistema com os parâmetros nominais da planta em malha aberta, para o sistema cujos parâmetros da planta e do controlador foram otimizados iterativamente e para o sistemas cujos parâmetros da planta e do controlador foram otimizados simultaneamente. Nesses casos, a expressão analítica da função objetivo não foi fornecida. A Fig. 3.10 mostra a resposta ao degrau unitário de $x_1(t)$ em função do tempo. E a Fig. 3.11 mostra a resposta de $x_2(t)$ em função do tempo.

Os sistemas representados na Fig. 3.10 possuem valores de pico e tempo de acomodação bem próximos. Já na Fig. 3.11 essas diferenças são mais perceptíveis. Nota-se um maior *overshoot* e um tempo de acomodação maior para o sistema com os parâmetros nominais em malha aberta, seguido

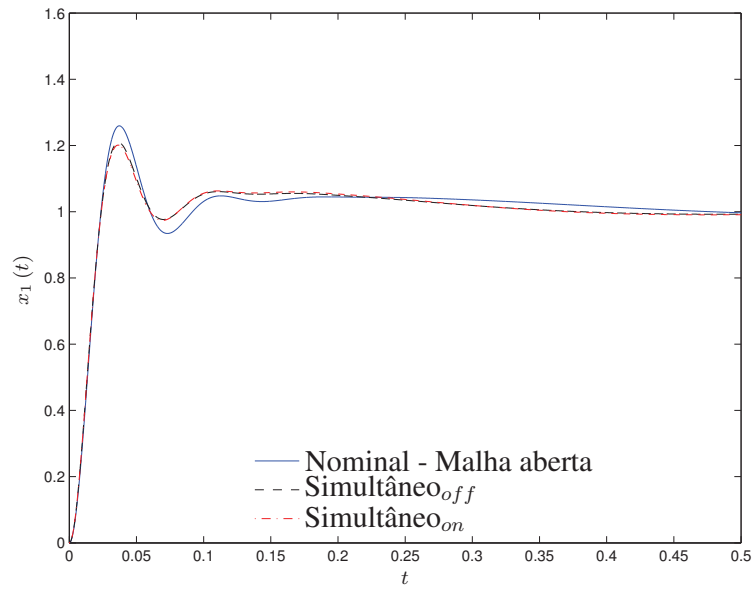


Figura 3.8 - Curvas $x_1(t)$ de resposta ao degrau - Nominal e Simultâneo sem e com o gradiente.

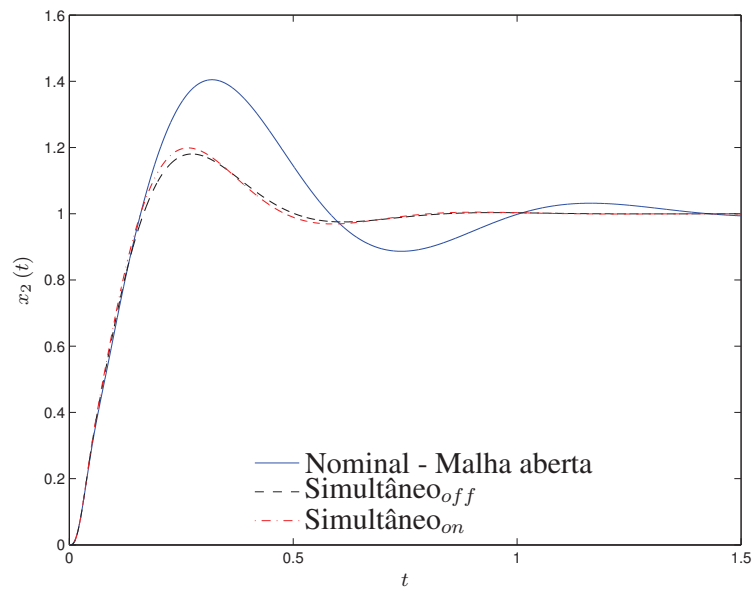


Figura 3.9 - Curvas $x_2(t)$ de resposta ao degrau - Nominal e Simultâneo sem e com o gradiente.

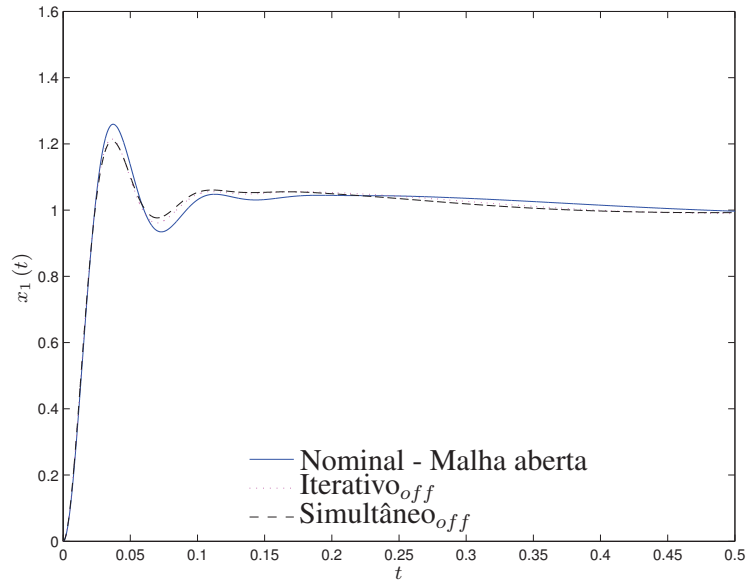


Figura 3.10 - Curvas $x_1(t)$ de resposta ao degrau - Nominal, Iterativo e Simultaneo sem o gradiente.

do sistema cujos parâmetros da planta e do controlador foram otimizados simultaneamente e do sistema cujos parâmetros da planta e do controlador foram otimizados iterativamente.

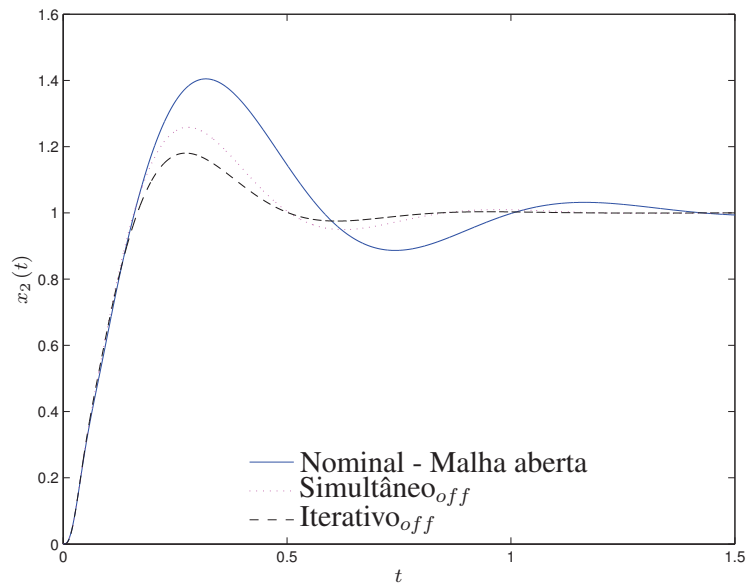


Figura 3.11 - Curvas $x_2(t)$ de resposta ao degrau - Nominal, Iterativo e Simultaneo sem o gradiente.

4 COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

4.1 Comentários

Nesta dissertação, através de metodologias analíticas e numéricas, investigou-se o problema de otimização simultânea dos parâmetros da planta e do controlador de um modelo simplificado de uma suspensão veicular ativa.

Esse estudo iniciou-se com o desenvolvimento de três metodologias analíticas, Metodologia Baseada na Resposta Temporal, Metodologia Quadrática e Metodologia Variacional, apresentadas no capítulo 2. A Metodologia Baseada na Resposta Temporal foi desenvolvida a partir da solução da equação dinâmica do sistema e da teoria sobre problemas de otimização não lineares com restrições de igualdade. As metodologias Quadrática e Variacional foram desenvolvidas, respectivamente, com base nas teorias do Regulador Linear Quadrático Ótimo e do Cálculo Variacional. Também foi desenvolvida uma metodologia numérica baseada num algoritmo disponível na literatura.

No capítulo 3, o problema de otimização proposto para o modelo da suspensão veicular foi abordado. Para se resolver esse problema de otimização, duas estratégias de otimização foram sugeridas: estratégia iterativa e estratégia simultânea. Os resultados numéricos foram obtidos utilizando-se a função *fmincon* do MATLAB. Esta função permite inserir opções que auxiliam na resolução do problema de otimização. Neste trabalho, o objetivo foi incorporar a fórmula analítica do gradiente da função a ser minimizada, de forma a melhorar o desempenho das estratégias propostas. Os algoritmos desenvolvidos estão nos Apêndices B, C, D.

4.2 Conclusões

As condições de otimalidade encontradas a partir das metodologias analíticas apresentaram não linearidades que dificultaram a obtenção de suas soluções. Além disso, no caso da Metodologia Baseada na Resposta Temporal, é necessário obter as condições de otimalidade de segunda ordem

para garantir que os pontos estacionários encontrados sejam de mínimo. Devido à complexidade em se obter as soluções analíticas, uma alternativa numérica foi desenvolvida para se resolver o problema de otimização simultânea.

Os menores valores da função custo foram obtidos com a estratégia simultânea. No entanto, a estratégia iterativa forneceu valores próximos. Todas as duas estratégias apresentaram menores valores do funcional de custo quando a fórmula analítica do gradiente foi fornecida. Porém, com a inserção desta fórmula, o tempo computacional aumentou significativamente.

Com relação ao sistema em malha fechada, observa-se que os melhores desempenhos, em termos de menores valores de sobre-sinal dos deslocamentos das massas, foram obtidos através da otimização simultânea. O fato de se fornecer a fórmula analítica do gradiente não alterou de forma significativa o desempenho do sistema.

4.3 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, pode-se estender esse estudo para sistemas mais complexos, sistemas com um maior número de parâmetros de otimização e sistemas cujas representações não se limitam à combinação linear de matrizes, estendendo para os casos em que os sistemas podem ser escritos como combinações quadráticas ou polinomiais de matrizes.

Além de inserir uma fórmula analítica para o gradiente da função objetivo, é possível obter uma expressão analítica para a hessiana da função a ser minimizada com relação às variáveis de otimização, fornecendo, provavelmente, resultados ainda melhores.

REFERÊNCIAS

- BAZARAA, M. S.; C.M.SHETTY. **Nonlinear Programming**. New York, USA: John Wiley and Sons, Inc., 1943.
- BEGG, D. W.; LIU, X. On simultaneous optimization of smart structures - part ii: Algorithms and examples. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 184, n. 1, p. 25–37, 2000.
- BELVIN, W. K.; PARK, K. C. Structural tailoring and feedback control synthesis: An interdisciplinary approach. **Journal of Guidance**, v. 13, n. 3, p. 424–429, 1990.
- BRANCÍK, L. Matlab programs for matrix exponential function derivative evaluation. In: **Technical Computing Prague**. Prague: [s.n.], 2008. p. 17–24.
- BRYSON, A. E.; HO, J. Y. C. **Applied Optimal Control**. USA: Hemisphere Publishing Corporation, 1975.
- CAMINO, J. F. **Análise de Suspensões Veiculares Utilizando Técnicas de Controle Robusto**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, BRASIL, 1998.
- CAMINO, J. F. **Optimization over Convex Matrix Inequalities**. Tese (Doutorado) — University of California San Diego, San Diego, USA, 2003.
- CAMINO, J. F.; OLIVEIRA, M. C. de; SKELTON, R. E. Plant and control design using convexifying LMI methods. In: **IFAC**. Barcelona, Spain: [s.n.], 2002. p. 137–142.
- _____. Convexifying linear matrix inequality methods for integrating structure and control design. **ASCE Journal of Structural Engineering, special issue on Structural Control**, v. 129, p. 978–988, 2003.

DATTA, B. N. **Numerical Linear Algebra**. USA: Brooks/Cole Publishing Company, 1995.

ELMADANY, M. M.; ABDULJABBAR, Z. S. Linear quadratic gaussian control of a quarter-car suspension. **Vehicle System Dynamics**, v. 32, n. 6, p. 479–497, 1999.

FATHY, H. K. et al. Nested plant/controller optimization with application to combined passive/active automotive suspensions. In: **American Control Conference**. Denver, Colorado, USA: [s.n.], 2003. p. 3375–3380.

_____. On the coupling between the plant and controller optimization problems. In: **American Control Conference**. Arlington, Virginia, USA: [s.n.], 2001. p. 1864–1869.

GRANDHI, R. V. Structural and control optimization of space structures. **Computers and Structures**, v. 31, n. 2, p. 139–150, 1989.

GRIGORIADIS, K. M. et al. Optimal redesign of linear systems. In: **American Control Conference**. San Francisco, California, USA: [s.n.], 1993. p. 2660–2684.

HALE, A. L.; LISOWSKI, R. J.; DAHL, W. E. Optimal simultaneous structural and control design of maneuvering flexible spacecraft. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 8, p. 86–93, 1984.

JIN, I. M.; SEPULVEDA, A. E. Structural/control system optimization with variable actuator masses. **AIAA Journal**, v. 33, n. 9, p. 1709–1714, 1995.

KAJIWARA, I.; TSUJIOKA, K.; NAGAMATSU, A. Approach for simultaneous optimization of a structure and control system. **AIAA Journal**, v. 32, n. 4, p. 866–873, 1994.

KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. **Linear Optimal Control Systems**. New York, USA: John Wiley and Sons, Inc., 1972.

LU, J.; SKELTON, R. E. Integrating structure and control design to achieve mixed H_2/H_∞ performance. **International Journal of Control**, v. 73, n. 16, p. 1449–1462, 2000.

LUENBERGER, D. G. **Linear and Nonlinear Programming**. USA: Addison Wesley Publishing Company, 1937.

OGATA, K. **Modern Control Engineering**. New Jersey, USA: Prentice-Hall, Inc., 1970.

OLIVEIRA, M. C. de; CAMINO, J. F.; SKELTON, R. E. A convexifying algorithm for the design of structured linear controller. In: **IEEE Conference on Decision and Control**. Sydney, Australia: [s.n.], 2000. p. 2781–2786.

ONODA, J.; HAFTKA, R. T. An approach to structure/control simultaneous optimization for large flexible spacecraft. **AIAA Journal**, v. 25, n. 8, p. 1133–1139, 1987.

RAO, S. S. Combined structural and control optimization of flexible structures. **Engineering Optimization**, v. 13, n. 1, p. 1–16, 1988.

REYER, J. A. **Combined Embodiment Design and Control Optimization: Effect of Cross-Disciplinary Coupling**. Tese (Doutorado) — The University of Michigan, Michigan, USA, 2000.

SMITH, M. J.; GRIGORIADIS, K. M.; SKELTON, R. E. Optimal mix of passive and active control in structures. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 15, n. 4, p. 912–919, 1992.

SOUBHIA, A. L.; JEUKEN, G.; CAMINO, J. F. Otimização dos parâmetros da planta e do controlador de uma suspensão veicular ativa. In: **Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**. Campina Grande, Paraíba, Brasil: [s.n.], 2010. p. 01–07.

THOMPSON, A. G. Design of active suspensions. In: **Proceedings of the Instn. Mech. Engrs.** [S.l.: s.n.], 1971. p. 553–563.

_____. An active suspension with optimal linear state feedback. **Vehicle System Dynamics**, v. 5, n. 4, p. 187–203, 1976.

THOMPSON, A. G.; PEARCE, C. Direct computation of the performance index for an optimally controlled active suspension with preview applied to a half-car model. **Vehicle System Dynamics**, v. 35, n. 2, p. 121–137, 2001.

YANG, Y. P.; CHEN, Y. A. Multiobjective optimization of hard disk suspension assemblies. integrated structure and control design. **Computers and Structures**, v. 59, n. 4, p. 771–782, 1996.

ZHU, Y. et al. Simultaneous optimization of structure and control for vibration suppression. **Journal of Vibration and Acoustic**, v. 121, n. 2, p. 237–243, 1999.

APÊNDICE A - TESTES DO ARTIGO

Neste capítulo são apresentados os resultados que comprovam a eficiência do Algoritmo 2.2, retirado de Brancík (2008).

A.1 Matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ que comutam

No caso em que as matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ comutam, os resultados obtidos para as derivadas numéricas, dF_{ab_N} , e os resultados obtidos para as derivadas calculadas a partir de fórmulas analíticas foram comparados utilizando-se o conceito de Norma Euclidiana e Norma Infinita (Anexo B).

Escrevendo a função exponencial matricial definida em (2.44) como uma série de Taylor, obtém-se

$$F_{ab}(t, \alpha) = e^{[A(\alpha) + B(\alpha)]t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} [A(\alpha) + B(\alpha)]^k,$$

isto é, desenvolvendo a expressão anterior, tem-se

$$F_{ab}(t, \alpha) = I + t[A(\alpha) + B(\alpha)] + \frac{t^2}{2!} [A(\alpha) + B(\alpha)]^2 + \frac{t^3}{3!} [A(\alpha) + B(\alpha)]^3 + \dots \quad (\text{A.1})$$

A derivada, com relação à α , da expressão dada em (A.1) é definida como

$$\frac{\partial F_{ab}(t, \alpha)}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial I}{\partial \alpha_j} + t \frac{\partial [A(\alpha) + B(\alpha)]}{\partial \alpha_j} + \frac{t^2}{2!} \frac{\partial [A(\alpha) + B(\alpha)]^2}{\partial \alpha_j} + \frac{t^3}{3!} \frac{\partial [A(\alpha) + B(\alpha)]^3}{\partial \alpha_j} + \dots \quad (\text{A.2})$$

onde

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_j} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial [A(\alpha) + B(\alpha)]}{\partial \alpha_j} = (A_j + B_j), \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [A(\alpha) + B(\alpha)]^2}{\partial \alpha_j} &= \frac{\partial \{[A(\alpha) + B(\alpha)] [A(\alpha) + B(\alpha)]\}}{\partial \alpha_j}, \\
&= \frac{\partial [A^2(\alpha) + 2A(\alpha)B(\alpha) + B^2(\alpha)]}{\partial \alpha_j}, \\
&= 2[A(\alpha) + B(\alpha)](A_j + B_j).
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Ou, ainda, pode-se reescrever (A.5) da seguinte forma

$$\frac{\partial [A(\alpha) + B(\alpha)]^2}{\partial \alpha_j} = 2(A_j + B_j)[A(\alpha) + B(\alpha)]. \tag{A.6}$$

Da mesma forma,

$$\frac{\partial [A(\alpha) + B(\alpha)]^3}{\partial \alpha_j} = 3[A(\alpha) + B(\alpha)]^2(A_j + B_j). \tag{A.7}$$

Ou pode-se reescrever (A.7) da seguinte forma

$$\frac{\partial [A(\alpha) + B(\alpha)]^3}{\partial \alpha_j} = 3(A_j + B_j)[A(\alpha) + B(\alpha)]^2. \tag{A.8}$$

Substituindo as expressões (A.3), (A.4), (A.5), (A.7) em (A.2), obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{ab}(t, \alpha)}{\partial \alpha_j} &= t(A_j + B_j) + \frac{t^2}{2!} 2[A(\alpha) + B(\alpha)](A_j + B_j) + \frac{t^3}{3!} 3[A(\alpha) + B(\alpha)]^2(A_j + B_j) + \dots \\
&= t(A_j + B_j) + \frac{t^2}{1!} [A(\alpha) + B(\alpha)](A_j + B_j) + \frac{t^3}{2!} [A(\alpha) + B(\alpha)]^2(A_j + B_j) + \dots \\
&= \left\{ I + \frac{t}{1!} [A(\alpha) + B(\alpha)] + \frac{t^2}{2!} [A(\alpha) + B(\alpha)]^2 + \dots \right\} (A_j + B_j) t \\
&= e^{[A(\alpha) + B(\alpha)]t} (A_j + B_j) t.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Para os testes apresentados nessa seção, foram consideradas matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ cujas representações são dadas nas formas de combinações lineares das matrizes A_0 , A_i , B_0 e B_i , isto é,

$$A(\alpha) = A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \quad \text{e} \quad B(\alpha) = B_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i. \tag{A.10}$$

Então, a partir de (A.9) e (A.10), a primeira fórmula analítica para a derivada de $F_{ab}(t, \alpha)$ com relação à α_j é dada por

$$dF_{ab_{A1}}(t, \alpha) = e^{(A_0 + B_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i)t} (A_j + B_j) t. \tag{A.11}$$

Substituindo as expressões (A.3), (A.4), (A.6), (A.8) em (A.2), obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{ab}(t, \alpha)}{\partial \alpha_j} &= t(A_j + B_j) + \frac{t^2}{2!} 2(A_j + B_j)[A(\alpha) + B(\alpha)] + \frac{t^3}{3!} 3(A_j + B_j)[A(\alpha) + B(\alpha)]^2 + \dots \\
&= t(A_j + B_j) + \frac{t^2}{1!} (A_j + B_j)[A(\alpha) + B(\alpha)] + \frac{t^3}{2!} (A_j + B_j)[A(\alpha) + B(\alpha)]^2 + \dots \\
&= (A_j + B_j)t \left\{ I + \frac{t}{1!} [A(\alpha) + B(\alpha)] + \frac{t^2}{2!} [A(\alpha) + B(\alpha)]^2 + \dots \right\} \\
&= (A_j + B_j)t e^{[A(\alpha) + B(\alpha)]t}.
\end{aligned}$$

Substituindo as matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ definidas em (A.10) na expressão anterior, obtém-se a segunda expressão para a derivada analítica de $F_{ab}(t, \alpha)$, com relação à α_j , que é dada por

$$dF_{ab_{A2}}(t, \alpha) = (A_j + B_j)t e^{(A_0 + B_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i)t}. \quad (\text{A.12})$$

Como as matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ comutam, então, de acordo com uma das propriedades de exponencial de matrizes, pode-se reescrever

$$e^{[A(\alpha) + B(\alpha)]t} = e^{A(\alpha)t} e^{B(\alpha)t}. \quad (\text{A.13})$$

A derivada de (A.13), com relação à α_j , é definida como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e^{A(\alpha)t} e^{B(\alpha)t}}{\partial \alpha_j} &= \frac{\partial e^{A(\alpha)t}}{\partial \alpha_j} e^{B(\alpha)t} + e^{A(\alpha)t} \frac{\partial e^{B(\alpha)t}}{\partial \alpha_j} \\
&= e^{A(\alpha)t} A_j t e^{B(\alpha)t} + e^{A(\alpha)t} B_j t e^{B(\alpha)t} \\
&= e^{A(\alpha)t} (A_j + B_j)t e^{B(\alpha)t}.
\end{aligned}$$

Definindo as matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ como em (A.10), então a terceira forma possível para a derivada analítica de $F_{ab}(t, \alpha)$, com relação à α_j , é dada por

$$dF_{ab_{A3}}(\alpha, t) = e^{(A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i)t} (A_j + B_j)t e^{(B_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i)t}. \quad (\text{A.14})$$

Foram apresentadas três formas analíticas, (A.11), (A.12) e (A.14), da derivada, com relação à α_j , da função exponencial matricial definida em (2.44). Os resultados obtidos a partir dessas derivadas foram comparados com os resultados obtidos para as derivadas numéricas, dF_{ab_N} . Para se fazer essa comparação foram utilizadas a Norma Euclidiana $\|\cdot\|_2$ e a Norma Infinita $\|\cdot\|_\infty$ (ver Apêndice B).

Nos testes apresentados nessa seção, para comparar a derivada numérica com as derivadas analíticas, foram calculados os seguintes erros utilizando-se a Norma Euclidiana e a Norma Infinita,

respectivamente,

$$e_{N2}^1 = \|dF_{ab_N} - dF_{ab_{A1}}\|_2, \quad e_{N2}^2 = \|dF_{ab_N} - dF_{ab_{A2}}\|_2 \quad \text{e} \quad e_{N2}^3 = \|dF_{ab_N} - dF_{ab_{A3}}\|_2 \quad (\text{A.15})$$

$$e_{N\infty}^1 = \|dF_{ab_N} - dF_{ab_{A1}}\|_\infty, \quad e_{N\infty}^2 = \|dF_{ab_N} - dF_{ab_{A2}}\|_\infty \quad \text{e} \quad e_{N\infty}^3 = \|dF_{ab_N} - dF_{ab_{A3}}\|_\infty. \quad (\text{A.16})$$

Para expandir a classe de testes, foram calculadas as derivadas numéricas e analíticas da seguinte função, constituída por duas exponenciais matriciais,

$$J_{teste} = Q(\alpha) e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]t} e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]'t}, \quad (\text{A.17})$$

onde $Q(\alpha)$ é uma matriz dependente de α .

A derivada analítica da função J_{teste} com relação à variável α é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{teste}}{\partial \alpha} = & \frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha} e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]t} e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]'t} + Q(\alpha) \frac{\partial e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]t}}{\partial \alpha} e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]'t} + \\ & + Q(\alpha) e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]t} \frac{\partial e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]'t}}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Quando as matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ são definidas como em (A.10) tem-se as seguintes derivadas analíticas

$$\begin{aligned} dJ_{teste_{A1}} = & \frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha} e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]t} e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]'t} + Q(\alpha) (A_j + B_j) t e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]t} e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]'t} + \\ & + Q(\alpha) e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]t} e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]'t} (A_j + B_j)' t. \quad (\text{A.18}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dJ_{teste_{A2}} = & \frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha} e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]t} e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]'t} + \\ & + Q(\alpha) e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]t} \left[(A_j + B_j) t + (A_j + B_j)' t \right] e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]t}. \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

Para usar o algoritmo 2.2, pode-se reescrever, usando-se (2.44), a função J_{teste} dada em (A.17), da seguinte forma

$$J_{teste_N} = Q(\alpha) F_{ab}(\alpha, t) F_{ab}'(\alpha, t). \quad (\text{A.20})$$

A derivada da função J_{teste_N} , com relação à variável α , pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_{teste_N}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial [Q(\alpha) F_{ab}(\alpha, t) F'_{ab}(\alpha, t)]}{\partial \alpha} \\ &= \frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha} F_{ab}(\alpha, t) F'_{ab}(\alpha, t) + Q(\alpha) \frac{\partial F_{ab}(\alpha, t)}{\partial \alpha} F'_{ab}(\alpha, t) + Q(\alpha) F_{ab}(\alpha, t) \frac{\partial F'_{ab}(\alpha, t)}{\partial \alpha}.\end{aligned}$$

Definindo $\frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha} = dQ$, logo, a derivada numérica da função J_{teste} pode ser calculada da seguinte forma

$$dJ_{teste_N} = (dQ) F_{ab_N} F'_{ab_N} + Q(\alpha) (dF_{ab_N}) F'_{ab_N} + Q(\alpha) F_{ab_N} (dF_{ab_N})'. \quad (\text{A.21})$$

Onde F_{ab_N} e dF_{ab_N} são, respectivamente, a função exponencial e a sua derivada numérica.

Para confrontar os resultados obtidos numericamente, dJ_{teste_N} , e os resultados obtidos para as derivadas calculadas a partir das fórmulas analíticas, $dJ_{teste_{A1}}$ e $dJ_{teste_{A2}}$, os seguintes erros, utilizando-se a Norma Euclidiana e a Norma Infinita, foram calculados

$$eJ_{N2}^1 = \|dJ_{teste_N} - dJ_{teste_{A1}}\|_2 \quad \text{e} \quad eJ_{N2}^2 = \|dJ_{teste_N} - dJ_{teste_{A2}}\|_2 \quad (\text{A.22})$$

$$eJ_{N\infty}^1 = \|dJ_{teste_N} - dJ_{teste_{A1}}\|_\infty \quad \text{e} \quad eJ_{N\infty}^2 = \|dJ_{teste_N} - dJ_{teste_{A2}}\|_\infty. \quad (\text{A.23})$$

Para a realização desses testes foram escolhidas matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ cujas representações estão definidas em (A.10).

Nos primeiros testes, em particular, as matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ foram definidas como

$$A(\alpha) = \alpha_1 A_1 \quad \text{e} \quad B(\alpha) = \alpha_1 B_1.$$

A partir de (2.43), tem-se $M(\alpha) = \alpha_1 (A_1 + B_1)$. Então, a partir de (2.45), obtém-se $dM(\alpha) = (A_1 + B_1) t$. Com essas informações, todo o procedimento descrito na Sec. A.1 foi realizado.

Para esses testes, dois pares de matrizes A_1 e B_1 foram escolhidas como

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0,5 & -0,3 \\ 0 & -0,2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -13 & 2 \\ 12 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0,1 & -0,0250 \\ -0,15 & -0,1625 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

Para a variável α_1 foram considerados os valores $\alpha_1 = 3$ e $\alpha_1 = 17$.

Utilizando as matrizes definidas anteriormente, as derivadas obtidas a partir das fórmulas

analíticas dadas em (A.11), (A.12) e (A.14), e as derivadas numéricas obtidas a partir do Algoritmo 2.2 foram calculadas.

Os máximos valores obtidos para as normas Euclidiana e Infinita, definidas em (A.15) e (A.16), estão representados na Tab A.1.

Tabela A.1 - Normas Euclidiana e Infinita - Matrizes A e B que comutam

Matrizes e α_1	Norma Euclidiana	Norma Infinita
A_1 e B_1 definidas em (A.24) e $\alpha_1 = 3$	$3,4086 \times 10^{-16}$	$4,7184 \times 10^{-16}$
A_1 e B_1 definidas em (A.25) e $\alpha_1 = 3$	$5,8684 \times 10^{-16}$	$7,6328 \times 10^{-16}$
A_1 e B_1 definidas em (A.24) e $\alpha_1 = 17$	$2,9612 \times 10^{-17}$	$4,0766 \times 10^{-17}$
A_1 e B_1 definidas em (A.25) e $\alpha_1 = 17$	$2,9924 \times 10^{-18}$	$4,1132 \times 10^{-18}$

Para estender a classe de testes, foram consideradas matrizes nas formas

$$A(\alpha) = A_0 + \alpha_1 A_1 \quad \text{e} \quad B(\alpha) = B_0 + \alpha_1 B_1.$$

Nesse caso, tem-se $M(\alpha) = A_0 + B_0 + \alpha_1 (A_1 + B_1)$. Então, $dM(\alpha) = (A_1 + B_1) t$.

Primeiramente foram definidas as matrizes A_0 , A_1 , B_0 e B_1 como

$$A_0 = \begin{bmatrix} -13 & 2 \\ 12 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 20 \\ -30 & -50 \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} -4,545 & -1,818 \\ 2,727 & -0,909 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0,1 & -0,0250 \\ -0,15 & -0,1625 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

Para a variável α_1 foram considerados valores $\alpha_1 = 3$ e $\alpha_1 = 17$.

Calculadas as derivadas analíticas e as derivadas numéricas, os máximos valores obtidos para as normas Euclidiana e Infinita, definidas em (A.15) e (A.16), estão representados na Tab A.2.

Tabela A.2 - Normas Euclidiana e Infinita - Matrizes A e B que comutam

Matrizes e α_1	Norma Euclidiana	Norma Infinita
Matrizes definidas em (A.26) e (A.27) e $\alpha_1 = 3$	$1,9672 \times 10^{-5}$	$2,0086 \times 10^{-5}$
Matrizes definidas em (A.26) e (A.27) e $\alpha_1 = 17$	$1,7522 \times 10^{-23}$	$1,8433 \times 10^{-23}$

Da mesma forma, foram consideradas as seguintes matrizes

$$A_0 = \begin{bmatrix} -20 & 30 \\ 0 & -50 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 20 \\ -30 & -50 \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} -4,545 & -1,818 \\ 2,727 & -0,909 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.29})$$

Para a variável α_1 foram considerados os valores $\alpha_1 = 3$ e $\alpha_1 = 17$.

Os máximos valores obtidos para as normas Euclidiana e Infinita, definidas em (A.15) e (A.16), estão representados na Tab A.3.

Tabela A.3 - Normas Euclidiana e Infinita - Matrizes A e B que comutam

Matrizes e α_1	Norma Euclidiana	Norma Infinita
Matrizes definidas em (A.28) e (A.29) e $\alpha_1 = 3$	$3,0868 \times 10^{-6}$	$3,0807 \times 10^{-6}$
Matrizes definidas em (A.28) e (A.29) e $\alpha_1 = 17$	$1,7329 \times 10^{-25}$	$1,6363 \times 10^{-25}$

Nota-se pelas tabelas A.1, A.2 e A.3, que os máximos valores encontrados para as normas Euclidiana e Infinita são bem próximos a zero. Isto é, os erros obtidos entre as derivadas analíticas e as derivadas numéricas tendem a zero.

A partir de J_{teste} definido em (A.17), define-se $Q(\alpha) = \alpha_1 Q_1$, onde

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.30})$$

e para a variável α_1 são considerados os valores $\alpha_1 = 3$ e $\alpha_1 = 17$.

Utilizando todas as matrizes definidas anteriormente, as derivadas da função J_{teste} obtidas analiticamente, definidas em (A.18) e (A.19), e a derivada obtida numericamente, dada em (A.21), foram calculadas. Os máximos valores obtidos para as normas Euclidiana e Infinita, definidas em (A.22) e (A.23), estão representados na Tab. A.4.

Tabela A.4 - Normas Euclidiana e Infinita de J_{teste} - Matrizes A e B que comutam

Matrizes e α_1	Norma Euclidiana	Norma Infinita
A_1 e B_1 definidas em (A.24) e $\alpha_1 = 3$	$3,9237 \times 10^{-15}$	$4,6629 \times 10^{-15}$
A_1 e B_1 definidas em (A.25) e $\alpha_1 = 3$	$4,2177 \times 10^{-15}$	$4,5519 \times 10^{-15}$
A_1 e B_1 definidas em (A.24) e $\alpha_1 = 17$	$6,9848 \times 10^{-16}$	$5,3148 \times 10^{-16}$
A_1 e B_1 definidas em (A.25) e $\alpha_1 = 17$	$4,4351 \times 10^{-20}$	$5,1245 \times 10^{-20}$
Matrizes definidas em (A.26) e (A.27) e $\alpha_1 = 3$	$7,5396 \times 10^{-8}$	$7,7409 \times 10^{-8}$
Matrizes definidas em (A.28) e (A.29) e $\alpha_1 = 3$	$3,6549 \times 10^{-10}$	$4,1567 \times 10^{-10}$
Matrizes definidas em (A.26) e (A.27) e $\alpha_1 = 17$	$2,9816 \times 10^{-44}$	$3,4359 \times 10^{-44}$
Matrizes definidas em (A.28) e (A.29) e $\alpha_1 = 17$	$6,5557 \times 10^{-51}$	$7,5391 \times 10^{-51}$

Percebe-se pela Tab. A.4 que os erros obtidos entre as derivadas analíticas e as derivadas numéricas são bem próximos a zero.

Os testes que envolvem matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ que não comutam são apresentados a seguir.

A.2 Matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ que não comutam

Neste caso, os resultados numéricos obtidos utilizando-se o Algoritmo 2.2 foram comparados com os resultados obtidos utilizando-se a definição da aproximação da derivada por diferenças finitas.

Sejam as funções $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $h \in \mathbb{R}$, a partir da definição da derivada da função $g(x)$, em um ponto, através do limite, ou seja,

$$\frac{dg(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Introduz-se a operação de diferença finita D_{DF} , a partir da qual obtém-se a seguinte função

$$D_{DF}(x) = \frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \quad (\text{A.31})$$

Isto é, para um h suficientemente pequeno recupera-se a derivada de $g(x)$ com relação à x .

Sejam as matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ as mesmas que as definidas em (A.10) e a função matricial $F_{ab}(t, \alpha)$ análoga à matriz definida em (2.44). Utilizando a definição dada em (A.31), a derivada de $F_{ab}(t, \alpha)$ com relação à α pode ser escrita como

$$\frac{\partial F_{ab}(t, \alpha)}{\partial \alpha} = dF_{ab_{DF}} = \frac{e^{[A(\alpha)+B(\alpha)](t+h)} - e^{[A(\alpha)+B(\alpha)]t}}{h}, \quad (\text{A.32})$$

sendo h suficientemente pequeno.

A partir dos resultados obtidos para as derivadas numéricas, dF_{ab_N} , e dos resultados obtidos para as derivadas via diferenças finitas, $dF_{ab_{DF}}$, foram calculados os seguintes erros utilizando a Norma Euclidiana e a Norma Infinita, respectivamente,

$$e_{N2} = \|dF_{ab_N} - dF_{ab_{DF}}\|_2 \quad (\text{A.33})$$

$$e_{N\infty} = \|dF_{ab_N} - dF_{ab_{DF}}\|_\infty \quad (\text{A.34})$$

Assim como no caso em que as matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ comutavam, para expandir a classe

de testes, foram calculadas as derivadas numéricas e as derivadas utilizando-se diferenças finitas da função J_{teste} , definida em (A.20).

A derivada da função J_{teste} com relação à α é calculada da seguinte forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_{teste}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial [Q(\alpha) F_{ab}(\alpha, t) F'_{ab}(\alpha, t)]}{\partial \alpha} \\ &= \frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha} F_{ab}(\alpha, t) F'_{ab}(\alpha, t) + Q(\alpha) \frac{\partial F_{ab}(\alpha, t)}{\partial \alpha} F'_{ab}(\alpha, t) + Q(\alpha) F_{ab}(\alpha, t) \frac{\partial F'_{ab}(\alpha, t)}{\partial \alpha}.\end{aligned}$$

Sendo $\frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha} = dQ$, logo, a partir de (A.32), a derivada da função J_{teste} , via diferenças finitas, pode ser calculada da seguinte forma

$$dJ_{teste_{DF}} = (dQ) F_{ab} F'_{ab} + Q(\alpha) dF_{ab_{DF}} F'_{ab} + Q(\alpha) F_{ab} (dF_{ab_{DF}})' . \quad (A.35)$$

No caso numérico a função J_{teste} é análoga à definida em (A.20), e a sua derivada com relação à α , dJ_{teste_N} , é definida em (A.21).

Para comparar as duas derivadas de J_{teste} , os seguintes erros, utilizando a Norma Euclidiana e a Norma Infinita, foram calculados

$$eJ_{N2} = \|dJ_{teste_N} - dJ_{teste_{DF}}\|_2 \quad (A.36)$$

$$eJ_{N\infty} = \|dJ_{teste_N} - dJ_{teste_{DF}}\|_\infty. \quad (A.37)$$

Para realizar esses testes foram escolhidas matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ cujas representações estão definidas em (A.10).

Nestes primeiros testes, em particular, as matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ foram definidas como

$$A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \quad \text{e} \quad B(\alpha) = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2$$

A partir de (2.43), tem-se, $M(\alpha) = \alpha_1 (A_1 + B_1) + \alpha_2 (A_2 + B_2)$. Então, a partir de (2.45), obtém-se $dM_{\alpha_1}(\alpha) = (A_1 + B_1)t$ e $dM_{\alpha_2}(\alpha) = (A_2 + B_2)t$. Com essas informações, todo o procedimento descrito na sec. A.2 foi realizado.

Nesse caso, foram escolhidos três conjuntos de matrizes, A_1 , A_2 , B_1 e B_2 , como segue

$$A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 300 \\ -350 & -100 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -10 & 200 \\ -35 & -49 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -100 & -300 \\ 350 & -830 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -10 & -29 \\ 28 & -83 \end{bmatrix}, \quad (A.38)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -50 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -13 & 1 \\ 11 & -25 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ -10 & -24 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -15 & -2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.39})$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -14 & -350 \\ 49 & -56 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -91 & 7 \\ 77 & -175 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -49 & 56 \\ -70 & -168 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -35 & 42 \\ -105 & -14 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.40})$$

Para essas matrizes, as derivadas foram calculadas via diferenças finitas e utilizando-se o Algoritmo 2.2. Assim, os máximos valores das normas Euclidiana e Infinita, definidas em (A.33) e (A.34), com relação à α_1 , foram obtidos e estão representados na Tab. A.5. E os máximos valores obtidos, com relação à α_2 , estão definidos na Tab. A.6.

Tabela A.5 - Normas Euclidianas e Infinitas - Matrizes que não comutam (α_1)

Matrizes	Norma Euclidiana	Norma Infinita
Matrizes definidas em (A.38)	$1,9475 \times 10^{-62}$	$2,2673 \times 10^{-62}$
Matrizes definidas em (A.39)	$1,6691 \times 10^{-9}$	$2,3197 \times 10^{-9}$
Matrizes definidas em (A.40)	$1,3402 \times 10^{-68}$	$1,8625 \times 10^{-68}$

Tabela A.6 - Normas Euclidianas e Infinitas - Matrizes que não comutam (α_2)

Matrizes	Norma Euclidiana	Norma Infinita
Matrizes definidas em (A.38)	$1,4463 \times 10^{-66}$	$1,8200 \times 10^{-66}$
Matrizes definidas em (A.39)	$2,6601 \times 10^{-16}$	$3,5636 \times 10^{-16}$
Matrizes definidas em (A.40)	$1,0709 \times 10^{-115}$	$1,4292 \times 10^{-115}$

Para ampliar os testes, foram consideradas matrizes na forma

$$A(\alpha) = A_0 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \quad \text{e} \quad B(\alpha) = B_0 + \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2.$$

Nesse caso, tem-se $M(\alpha) = A_0 + B_0 + \alpha_1 (A_1 + B_1) + \alpha_2 (A_2 + B_2)$. Então, $dM_{\alpha_1}(\alpha) = (A_1 + B_1) t$ e $dM_{\alpha_2}(\alpha) = (A_2 + B_2) t$.

Para este caso, foram escolhidos dois conjuntos de matrizes, $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$, como segue

$$A_0 = \begin{bmatrix} -45,45 & -18,18 \\ 27,27 & -9,09 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 300 \\ -350 & -100 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -10 & 200 \\ -35 & -49 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.41})$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} -100 & 200 \\ -300 & -500 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -100 & -300 \\ 350 & -830 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -10 & -29 \\ 28 & -83 \end{bmatrix} \quad (\text{A.42})$$

e

$$A_0 = \begin{bmatrix} -31,815 & -12,726 \\ 19,089 & -6,363 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -14 & -350 \\ 49 & -56 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -91 & 7 \\ 77 & -175 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.43})$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} -70 & 140 \\ -210 & -350 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -49 & 56 \\ -70 & -168 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -35 & 42 \\ -105 & -14 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.44})$$

Calculadas as derivadas via diferenças finitas e as derivadas numéricas, os máximos valores obtidos para as normas Euclidiana e Infinita, definidas em (A.33) e (A.34), com relação a α_1 e α_2 , estão representados na Tab. A.7 e na Tab. A.8, respectivamente.

Tabela A.7 - Normas Euclidianas e Infinitas - Matrizes que não comutam (α_1)

Matrizes	Norma Euclidiana	Norma Infinita
Matrizes definidas em (A.41) e (A.42)	$1,9467 \times 10^{-62}$	$2,2664 \times 10^{-62}$
Matrizes definidas em (A.43) e (A.44)	$1,3402 \times 10^{-68}$	$1,8625 \times 10^{-68}$

Tabela A.8 - Normas Euclidianas e Infinitas - Matrizes que não comutam (α_2)

Matrizes	Norma Euclidiana	Norma Infinita
Matrizes definidas em (A.41) e (A.42)	$1,8611 \times 10^{-125}$	$2,1667 \times 10^{-125}$
Matrizes definidas em (A.43) e (A.44)	$7,6135 \times 10^{-138}$	$1,0581 \times 10^{-137}$

Percebe-se pelas tabelas A.5, A.6, A.7 e A.8 que os valores das normas Euclidiana e Infinita são bem próximos a zero. Assim, conclui-se que o erro entre os cálculos das derivadas obtidas via diferenças finitas e das derivadas obtidas numericamente tendem a zero.

Para J_{teste} definido em (A.17), considera-se $Q(\alpha) = \alpha_q Q_1$, onde $\alpha_q = 3$ e Q_1 é análogo ao definido em (A.30).

A partir de todas as matrizes definidas anteriormente, as derivadas calculadas via diferenças finitas e as derivadas calculadas usando o Algoritmo 2.2 foram confrontadas. E os máximos valores obtidos para as normas Euclidiana e Infinita, definidas em (A.36) e (A.37), com relação a α_1 e α_2 , estão presentes na Tab. A.9 e na Tab. A.10, respectivamente.

Nota-se, pelas tabelas A.9 e A.10, que o erro entre a derivada calculada via diferenças finitas e a derivada calculada usando o Algoritmo 2.2 é praticamente zero.

Tabela A.9 - Normas Euclidiana e Infinita de J_{teste} - Matrizes A e B que não comutam (α_1)

Matrizes	Norma Euclidiana	Norma Infinita
A_1 e B_1 definidas em (A.38)	$3,9176 \times 10^{-131}$	2.9776×10^{-131}
A_1 e B_1 definidas em (A.39)	$3,9656 \times 10^{-32}$	3.4272×10^{-32}
A_1 e B_1 definidas em (A.40)	0,0000	0,0000
Matrizes definidas em (A.41) e (A.42)	0,0000	0,0000
Matrizes definidas em (A.43) e (A.44)	0,0000	0,0000

Tabela A.10 - Normas Euclidiana e Infinita de J_{teste} - Matrizes A e B que não comutam (α_2)

Matrizes	Norma Euclidiana	Norma Infinita
A_1 e B_1 definidas em (A.38)	$8,8650 \times 10^{-132}$	$6,7371 \times 10^{-132}$
A_1 e B_1 definidas em (A.39)	$4,8576 \times 10^{-31}$	$4,1382 \times 10^{-31}$
A_1 e B_1 definidas em (A.40)	0,0000	0,0000
Matrizes definidas em (A.41) e (A.42)	0,0000	0,0000
Matrizes definidas em (A.43) e (A.44)	0,0000	0,0000

APÊNDICE B - COMBINAÇÃO LINEAR DE MATRIZES

Algoritmo B.1 Combinação Linear de Matrizes

```
function [A,B,Ac,Bc] = CombLinearAB(alpha,Ac,Bc)

k=1;
sum_Am = Ac{1};
sum_Bm = Bc{1};
for i=2:size(alpha,2)
    Am{k} = alpha{i}*Ac{i};
    Bm{k} = alpha{i}*Bc{i};
    sum_Am = sum_Am+cell2mat(Am(k));
    sum_Bm = sum_Bm+cell2mat(Bm(k));
    k=k+1;
end

A = sum_Am;
B = sum_Bm;

j=1;
for i=2:size(alpha,2)
    dA{j} = Ac{i};
    dB{j} = Bc{i};
    j=j+1;
end
```

APÊNDICE C - PLANTA DO SISTEMA

Algoritmo C.1 Planta do Sistema

```
function [planta_ss,A,B,Ac,Bc]=planta(pNoOtim,pOtim,K);

m1 = pNoOtim(1);
m2 = pNoOtim(2);
alpha{1} = 1;
alpha{2} = pOtim(1);
alpha{3} = pOtim(2);
alpha{4} = pOtim(3);

Ac{1}=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 0 0 0;0 0 0 0];
Ac{2}=[0 0 0 0;0 0 0 0;-1/m1 0 0 0;0 0 0 0];
Ac{3}=[0 0 0 0;0 0 0 0;-1/m1 1/m1 0 0;1/m2 -1/m2 0 0];
Ac{4}=[0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 -1/m1 1/m1;0 0 1/m2 -1/m2];

Bc{1}=[0;0;-1/m1;1/m2];
Bc{2}=[0;0;0;0];
Bc{3}=[0;0;0;0];
Bc{4}=[0;0;0;0];

[A,B,Ac,Bc] = CombLinearAB(alpha,Ac,Bc);
C = [1 0 0 0; 0 1 0 0];
D=[0];

A = A-B*K;
planta_ss = ss(A,B,C,D);
```

APÊNDICE D - FUNÇÃO CUSTO E GRADIENTE

Algoritmo D.1 Função Custo

```
function [J,G] = custo_J(id,t,x0,pNoOtim,pOtim,K,Q,R)

[planta_ss,A,B,Ac,Bc]=planta(pNoOtim,pOtim,K);

[Y,T,X] = initial(planta_ss,x0,t);

u = -K*X';

dt = t(2)-t(1);

J= (trace(X'*X*Q)+trace(u*u'*R))*dt;
```

Algoritmo D.2 Gradiente

```
if nargin > 1 %Gradiente da função J, sendo x = x0*(expm(A-BK)'*t)
dA = Ac;
dB = Bc;

for p = 2:size(dA,2)
    dAB = dA{p}+dB{p}*K;

    gs = 0;
    for i = 1:size(t,2)
        MAlpha(:, :) = (A-B*K)*t(i);
        dMAlpha(:, :) = dAB*t(i);
        [FAlpha, dFAlpha] = expmt(MAlpha(:, :), dMAlpha(:, :));
        g = trace(((Q+K'*R*K)*(dFAlpha*x0'*x0*dFAlpha'+...
                                ...+FAlpha*x0'*x0*dFAlpha')))*dt;

        gs = gs+ g;
    end
    GAlpha(p-1) = gs;
end
for p = 1:size(A,2)
    dBK = [zeros(size(A))];
    dK1 = [zeros(size(A))];
    dK2 = [zeros(size(A))];
    dBK(:,p) = B;
    dK1(:,p) = K';
    dK2(p,:) = K;
    dK = R*(dK1+dK2);

    gs = 0;
    for i = 1:size(t,2)
        MK(:, :) = (A-B*K)*t(i);
        dMK(:, :) = -dBK*t(i);
        [FK, dFK] = expmt(MK(:, :), dMK(:, :));
        g = trace((dK*FK*x0'*x0*FK'+(Q+K'*R*K)*dFK*x0'*x0*FK'+...
                                ...+(Q+K'*R*K)*FK*x0'*x0*dFK'))*dt;

        gs = gs+ g;
    end
    GK(p) = gs;
end
if id == 3;
    G = [GAlpha GK];
else
    G = [GAlpha];
end
end
```

ANEXO A - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DINÂMICA DO SISTEMA

A.1 Sistema em Malha Fechada

Seja a equação dinâmica do sistema em malha fechada definida por

$$\dot{x}(t) = (A - BK) x(t).$$

Aplicando-se a transformada de Laplace (ver Ogata (1970)) nesta equação obtém-se

$$sX(s) - x(0) = (A - BK) X(s),$$

onde $X(s)$ é a transformada de Laplace de $x(t)$ e $x(0)$ é o estado inicial. Rearranjando essa equação tem-se

$$X(s) = [sI - (A - BK)]^{-1} x(0).$$

A transformada inversa de Laplace de $X(s)$ fornece a solução $x(t)$, então,

$$x(t) = L^{-1} \{ [sI - (A - BK)]^{-1} \} x(0).$$

Note que,

$$[sI - (A - BK)]^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{(A - BK)}{s^2} + \frac{(A - BK)^2}{s^3} + \dots$$

Portanto, a transformada inversa de Laplace de $[s - (A - BK)]^{-1}$ fornece

$$L^{-1} \{ [sI - (A - BK)]^{-1} \} = I + (A - BK)t + \frac{(A - BK)^2 t^2}{2!} + \frac{(A - BK)^3 t^3}{3!} + \dots = e^{(A - BK)t}.$$

Lembrando que, a transformada inversa de Laplace de uma matriz é a matriz obtida pela transformada inversa de Laplace de todos os seus elementos.

Com isso, a solução da equação dinâmica do sistema em malha fechada é obtida como

$$x(t) = e^{(A - BK)t} x(0).$$

ANEXO B - NORMA EUCLIDIANA E NORMA INFINITA

A função $\|p\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma norma se satisfaz os seguintes axiomas (ver Datta (1995)):

1. $\|p + q\| \leq \|p\| + \|q\|$,
2. $\|\xi p\| = |\xi| \|p\|$, onde ξ é um escalar,
3. $\|p\| \geq 0$ e $\|p\| = 0 \Leftrightarrow p = 0$.

As normas usuais para vetores no \mathbb{R}^n são a Norma 2 (também conhecida como Norma Euclidiana) e a Norma Infinita, que são dadas por

$$\|p\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |p_i|^2 \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \|p\|_\infty = \max_i |p_i|.$$

O conceito de norma vetorial pode ser estendido para matrizes, no sentido de se poder mensurar matrizes. Nesse caso, a Norma Euclidiana e a Norma Infinita são obtidas a partir das seguintes expressões

$$\|P\|_2 = (\lambda_{\max}(P'P))^{1/2} \quad \text{e} \quad \|P\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^m |p_{ij}| \right),$$

isto é, calculando a Norma Euclidiana obtém-se o valor singular máximo da matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e calculando a Norma infinita obtém-se a maior soma absoluta das linhas da matriz P .